



Martin Heck <http://timestormfilms.net/>

Análisis de concentración de contaminantes generados por una erupción volcánica

Analysis of pollutants concentration generated by a volcanic eruption

Maximiliano Arancibia¹, alumno de 5to año
Matías San Martín¹, alumno de 5to año
Carlos Jerez¹, profesor asociado

¹Programa de Ingeniería Matemática, Escuela de Ingeniería,
Pontificia Universidad Católica de Chile

*Autor de correspondencia: cjerez@ing.puc.cl

Maximiliano Arancibia¹, 5th year student
Matías San Martín¹, 5th year student
Carlos Jerez¹, associate professor

¹Mathematical Engineering Program, Engineering School,
Pontificia Universidad Católica de Chile

*Corresponding author: cjerez@ing.puc.cl

RESUMEN

El alto impacto ambiental que generan las erupciones volcánicas a su alrededor es indiscutible debido a las altas concentraciones de contaminantes que se liberan en el aire. Este es un problema no menor en un país como Chile, donde se concentra casi el 20% de los volcanes activos en el mundo. Las erupciones volcánicas contienen altos niveles de gases tóxicos que son dañinos para la salud humana y la habitabilidad de los pueblos cercanos a la erupción. Claros ejemplos de lo anterior son las recientes erupciones de volcanes como Calbuco, Villarrica o Chaitén. En busca de implementar un modelo matemático que permita analizar los niveles de concentración de gases contaminantes en el aire, generadas por una erupción volcánica, este trabajo ahondará en el análisis de la ecuación de convección-difusión con un campo de velocidades como un flujo potencial, asegurando una solución única bajo los parámetros y supuestos físicos estipulados. Se propondrá un modelo discreto resuelto por el método de elementos finitos para encontrar una solución numérica a los niveles de concentración de contaminantes, mostrando gráficamente algunos resultados a través del tiempo.

Palabras clave: volcán, convección-difusión, elementos finitos, contaminación.

ABSTRACT

The high environmental impact generated by volcanic eruptions in their surroundings, caused by the high concentrations of air pollutants released in each eruption, is unquestionable. The impact is even higher in a country like Chile, where almost 20% of the active volcanoes in the world are located. Volcanic eruptions contain high levels of toxic gases that are harmful to human health and endanger the habitability of towns around the eruption's site. Clear examples of this are the recent eruptions of Calbuco, Villarrica and Chaitén volcanoes. Looking to implement a mathematical model that allows us to analyze the gas concentration levels of air pollutants generated by a volcanic eruption, this investigation will deepen the analysis of the convection-diffusion equation with velocity field as a potential flow, ensuring a unique solution within the parameters stipulated and physical assumptions. A discrete model solved by the finite element method is proposed to find a numerical solution to the pollutants concentration levels for which some graphic results will be shown over time.

Keywords: volcano, convection-diffusion equation, finite element method, pollutant.

1. INTRODUCCIÓN

La influencia de los volcanes en la historia de la humanidad es algo que no se puede negar. La creación de islas y la modificación de la geografía terrestre es algo que surge como primer pensamiento. Como país, se tienen recuerdos mucho más recientes, como lo son los casos de los volcanes Villarica, Calbuco y Chaitén.

Es importante, al momento de analizar el impacto de los volcanes, notar que una erupción tiene principalmente 2 efectos: el escurrimiento de lava y la expulsión de gases tóxicos en conjunto con ceniza volcánica. De hecho, al analizar la extinción de los dinosaurios, se pueden encontrar teorías donde la caída de un meteorito no fue la directa responsable, sino que fueron los volcanes, al hacer erupción masiva generada por el gran impacto del meteorito [1].

Estas teorías hacen pensar que la lava no fue la encargada de terminar el legado de los dinosaurios. No obstante, la ceniza volcánica y los gases tóxicos que se liberaron a la atmósfera fueron el principal culpable de este hecho. Los gases tóxicos acabaron con gran parte de la flora y, es por esto, que los animales de gran tamaño no pudieron encontrar el alimento suficiente, llevándolos a la extinción [1].

1. INTRODUCTION

The Volcanoes influence on mankind history it is a fact that cannot be denied. The creation of Islands and the changes over the earth geography are some examples at first thought. In Chile, we have more recent events, like volcanoes Villarrica, Calbuco and Chaitén.

It is important to note, when analyzing the volcanoes impact, that the eruptions have mainly two effects: the lava flow and expulsion of toxic gases with volcanic ashes. In fact, while analyzing dinosaur's extinction, it can be found several theories where the meteorite was not directly responsible, but the volcanoes were, since massive eruptions were produced by the big meteorite impact [1].

The volcanic ashes and toxic gases released to the atmosphere were the main reason of the dinosaur's extinction. The toxic gases ended most of the flora on the globe, and then, herbivores dinosaurs could not find enough food, bringing them to extinction [1].

Nowadays, more than 500 millions of people live under the threat of a volcano and over 550 volcanoes are estimated to be active around the world [2], where approximately 90 of them are in Chile [3]. That is why, it is crucial for

En la actualidad, más de 500 millones de personas viven bajo la amenaza de algún volcán y se estiman cerca de 550 volcanes activos en el mundo [2], donde aproximadamente 90 de ellos están ubicados en Chile [3]. Por ello, es crucial para nuestro país tenerlos constantemente monitoreados y tener planes de contingencia efectivos y respaldados científicamente.

En este contexto surge la necesidad de predecir cuantitativamente la extensión de las **COLUMNAS DE CENIZAS** liberadas por los volcanes para, de este modo, desarrollar correctamente un plan de evacuación en caso de emergencia.

En este documento se propone un modelo físico para explicar el fenómeno de una erupción volcánica, enfocándose principalmente en el comportamiento que presentan los gases tóxicos expulsadas por el volcán en el aire y cómo se mueven en el espacio. Además, con herramientas matemáticas se analizarán los niveles de contaminación en el espacio de manera cuantitativa, sujeto a los índices de riesgo para los habitantes. Todo esto, en pos de generar un plan de contingencia que realice evacuaciones de manera efectiva para cuidar la salud de la población.

2. METODOLOGÍA

Como modelo general del problema se pueden reconocer dos grandes ejes. El primero es el modelo de difusión y convección: este modelo nos indica cómo varía una cantidad, masa o concentración cuando estas se pueden mover en el ambiente y esto se modela mediante una función de difusividad ($D(x,t)$) que depende de la posición y del tiempo.

Por otro lado, también se tiene que modelar la influencia del viento, sin embargo, se asume la velocidad del viento conocida, así que ignoraremos las ecuaciones relacionadas. Este supuesto tiene el fin de evitar trabajar directamente con la ecuación de Navier-Stokes, que por lo general necesita métodos más complicados y poco eficientes. En resumen, la modelación del fenómeno estaría cargo de la ecuación difusión-convección (Ecuación 1):

our country to have them constantly monitored and have effective contingency plans, scientifically supported.

In this context arises the need to quantitatively predict the spreading of the **ERUPTION COLUMN** released by volcanoes, trying to provide a correct evacuation plan in case of emergency.

“Therefore, in this paper there is a physical model proposed to explain the volcanic eruption phenomenon, mainly focusing on the behavior of the volcano toxic gases released and how they move in the air. Furthermore, the levels of contamination in space, considering inhabitant risk indexes, will be evaluated quantitatively, using mathematical tools. The aim of this study is to provide an effective contingency plan to protect the health of the population.”

2. METHODOLOGY

As a general model for this problem, it can be separated into two big areas: The first one, is the model for convection-diffusion, which tells how a quantity, like mass or concentration, varies when this can move over the space and changes over time, and this depend over a function of diffusivity ($D(x,t)$) on function of time and position.

On the other side, the wind influence is also modeled. Nonetheless, the velocity of the wind is assumed to be known. This assumption tries to avoid the work with Navier-Stokes equation, which commonly needs more complicated and less efficient methods. The model for this phenomenon will be explained over the convection-diffusion equation, on (Equation 1):

$$\frac{\partial w}{\partial t}(x,t) = \text{div}(D(x,t)\nabla w(x,t)) - \text{div}(\vec{V}(x,t)w(x,t)) + R(x,t) \quad [1]$$

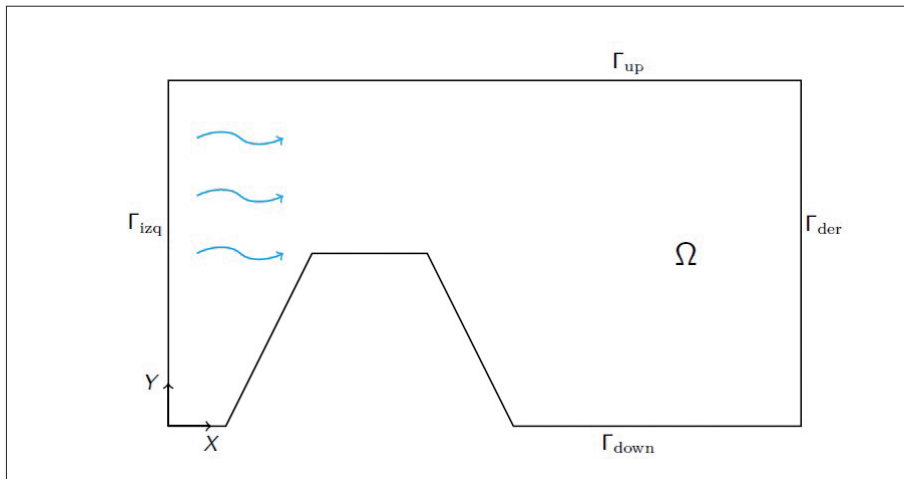


Figura 1. Esquema del dominio a trabajar, mostrando las definiciones de la frontera.

Figure 1. Scheme for the domain, remarking his boundary.

con $x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}$ y $t \in [0, T] \subseteq \mathbb{R}^+$, donde \mathbb{R} representa el conjunto de los números reales y además:

- w representa la concentración de contaminante en el aire, que depende de la posición y del tiempo.
- D corresponde al coeficiente de difusión, que depende de la concentración w y de la posición. Con los supuestos de la sección 2, se llegará a que esta es una constante.
- \vec{V} corresponde al campo de velocidades del aire, que dependen de la posición y del tiempo.
- R corresponde a la emisión de contaminantes provocada por la erupción del volcán. Esto describe la fuente de contaminación salida desde el volcán, que depende del tiempo y de la posición.

Se propone un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ en el primer cuadrante (ver **Figura 1**) para trabajar en el modelo regido por la ecuación 1.

2.1 Supuestos físicos

Para poder abordar el problema de manera efectiva, se asumen condiciones físicas fundamentales que permitirán trabajar, manteniendo un error aceptable en el realismo del modelo propuesto. Los supuestos son:

- Fluido ideal.
- Fluido irrotacional.
- Fluido incompresible.
- Estado estacionario.
- Condiciones de borde simplificadas.

Esto provocará una serie de simplificaciones al modelo, que hará que las ecuaciones diferenciales parciales de la ecuación 1, sean tratables de manera simple por el método de elementos finitos (FEM, por sus siglas en inglés).

2.2 Formulación fuerte

La formulación fuerte es llamada así, porque se modelan las

with $x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}$ y $t \in [0, T] \subseteq \mathbb{R}^+$, where \mathbb{R} represents the set of all real numbers, and:

- w represents the pollutant's concentration on air, in function of time and space.
- D is the diffusion coefficient, in function of the concentration and time and position. Over assumptions defined in section 2, this will be a constant.
- \vec{V} represents the vector field of air velocity in function of time and space.
- R represents the pollutants' emission generated by the volcanic eruption. This describes the contamination source outgoing from the volcano, in function of time and space.

A first quadrant domain $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ is proposed (see **Figure 1**) to check the model equation.

2.1 Physical assumptions

To approach the problem in an effective way, fundamental physical assumptions are proposed, that let the model to be more tractable, keeping and acceptable realism of the mathematical model. The assumptions are:

- Ideal fluid.
- Incompressible fluid.
- Irrotational fluid.
- Steady state.
- Boundary conditions simplified.

This will cause several simplifications to the model, making the partial differential equations of equation 1 being tractable in a simple way by the finite element method (FEM).

2.2 Strong formulation

The strong formulation model is named so because the differential equations are modeled with boundary conditions

ecuaciones diferenciales en conjunto con las condiciones de borde que permiten modelarla. Primero, se tiene que resolver el problema asociado al viento y luego se puede estudiar el problema asociado a la difusión de contaminantes.

2.2.1 Viento

Usando los supuestos físicos se puede establecer el problema de buscar un flujo potencial en el dominio Ω . Si tenemos $\vec{V} = \nabla\phi$, para algún ϕ , las ecuaciones 2 hasta la 5, explican el comportamiento que debe tener el flujo potencial para cumplir con los supuestos físicos expuestos en la sección 2.1.

$$\Delta\phi = 0, \text{ sobre } \Omega \quad [2]$$

$$\gamma_N\phi = -c, \text{ sobre } \Gamma_1 \quad [3]$$

$$\gamma_N\phi = c, \text{ sobre } \Gamma_1 \quad [4]$$

$$\gamma_N\phi = 0, \text{ sobre } \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \quad [5]$$

donde $\gamma_N\phi$ representa el flujo normal a través de la frontera del dominio Ω (que es Γ) y $c > 0$ es una constante.

2.2.2 Difusión-convección de contaminantes

Usando los supuestos explicados en la sección 2.1 y utilizando las implicancias matemáticas que estos significan, además de asumir que se conoce el comportamiento del campo de velocidades \vec{V} , expuesto en la sección 2.2.1, se establece una versión simplificada de la ecuación de difusión-convección, en la ecuación 6.

$$w_t = D \cdot \Delta_x w - \text{div}_x(\vec{V} w) + R. \quad [6]$$

Además, dos condiciones de borde, expuestas en las ecuaciones 7 y 8:

$$\gamma_{D_x} w(x, \cdot) = 0, \text{ para } x \in \Gamma \quad [7]$$

$$\gamma_{D_x} w(\cdot, t) = R(x, t), \text{ para } t = 0 \quad [8]$$

La primera condición de borde representa que el contaminante sale del centro del volcán y no llega de una fuente externa y que en los bordes exteriores (al tender a infinito) se puede asumir que no hay contaminación en el aire. Notar que en la frontera Γ_4 , que representa al suelo en esta situación, estamos asumiendo que no hay salida de contaminantes. Esto entra en los supuestos para simplificar nuestro modelo, ya que debiésemos considerarlo como un sumidero de contaminantes, a través de un parámetro que representa la velocidad de deposición, que depende de las propiedades del gas contaminante y su penetración en el suelo. Por otra parte, la segunda condición de borde representa el hecho que el volcán empieza con su actividad

associated that allow the modeling itself. First, it must be solved the wind problem, in section 2.2.1, and then it can be solved the pollutant convection-diffusion problem.

2.2.1 Wind

Over the physical assumption it can be established that this problem is equivalent to find a potential flow over Ω . If $\vec{V} = \nabla\phi$, for some ϕ , the equations 2 to 5 represents the behavior of the potential flow under the assumptions defined at section 2.1.

$$\Delta\phi = 0, \text{ over } \Omega \quad [2]$$

$$\gamma_N\phi = -c, \text{ over } \Gamma_1 \quad [3]$$

$$\gamma_N\phi = c, \text{ over } \Gamma_1 \quad [4]$$

$$\gamma_N\phi = 0, \text{ over } \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \quad [5]$$

where $\gamma_N\phi$ represents the normal flow over the boundary of Ω (which is Γ) and $c > 0$ a constant.

2.2.2 Convection-diffusion of pollutants

Using the mathematical implications given by the assumptions at section 2.1 and the given solution of the wind problem at section 2.2.1 it establishes a simplified version of convection-diffusion equation on equation 6, as follows:

$$w_t = D \cdot \Delta_x w - \text{div}_x(\vec{V} w) + R. \quad [6]$$

Plus, two boundary conditions, on equation 7 and 8:

$$\gamma_{D_x} w(x, \cdot) = 0, \text{ for } x \in \Gamma \quad [7]$$

$$\gamma_{D_x} w(\cdot, t) = R(x, t), \text{ for } t = 0 \quad [8]$$

The boundary condition on equation 7 represents that there is no pollutant concentration on the air, for the external boundary. Note that Γ_4 represents the soil boundary. Here, it is assumed that there are not outgoing pollutants, which is over the assumptions to simplify the boundary conditions. It should be modeled as a sink pollutant through a deposition rate parameter, which depends on pollutant properties and soil penetration.

On the other hand, the boundary condition on equation 8 states that the volcanic eruption starts at the beginning of the simulation.

al momento de partir la simulación.

Teniendo los dominios establecidos, el problema que se busca resolver corresponde a encontrar una función $w \in H^1(\Omega \times [0, T])$ que satisfice el siguiente problema:

$$w_t - D \cdot \Delta w + \text{div}(\vec{V}w) = R, \text{ para } x \in \Omega, \text{ y para } t \in [0, T], \quad [09]$$

$$\gamma_{D_x} w = 0, \text{ para } x \in \Gamma, \text{ y para todo } t \in [0, T], \quad [10]$$

$$\gamma_{D_x} w = R, \text{ para } t=0, \text{ y para todo } x \in \Omega. \quad [11]$$

Donde $D \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ es una constante, \vec{V} es una función vectorial en $[C^\infty(\Omega \times [0, T])]^2$ y R es una función escalar en $C^\infty(\Omega \times [0, T])$.

2.3 Formulación débil

Se pueden escribir las mismas ecuaciones anteriores en su **FORMA VARIACIONAL** definiendo los espacios correctos. No se describirá el trabajo matemático, sin embargo, en las siguientes secciones se describirá otra forma de plantear los problemas de la sección 2.2.

2.3.1 Viento

Sean $\alpha: [H^1(\Omega)]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ y $b: H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ dos funcionales lineales definidos para $\phi, v \in H^1(\Omega)$ como:

$$\alpha(\phi, v) = \int_{\Omega} \langle \nabla \phi, \nabla v \rangle dx, \quad [12]$$

$$b(v) = \int_{\Gamma_2} c \gamma_D(v) dx - \int_{\Gamma_1} c \gamma_D(v) dx \quad [13]$$

Nótese que $\gamma_D(v)$ representa el valor de la función v en la región de integración por temas de notación y de la definición de los espacios de funciones es necesario definir este operador que pareciera no decir nada. Luego, la formulación variacional del problema corresponde a encontrar una función $\phi \in H^1(\Omega)$ tal que:

$$\alpha(\phi, v) = b(v), \text{ para todo } v \in H^1(\Omega) \quad [14]$$

2.3.2 Difusión-convección de contaminantes

Sean $\alpha: [H_D^1(\Omega)]^2 \rightarrow H^1([0, T])$ y $\ell: H_D^1(\Omega) \rightarrow H^1([0, T])$, definidas para $w, v \in H_D^1(\Omega)$ como:

$$\alpha(w, v) = D \int_{\Omega} \langle \nabla_x w(x, t), \nabla_x v(x, t) \rangle dx - \int_{\Omega} \langle \vec{V}(x, t) w(x, t), \nabla_x v(x, t) \rangle dx \quad [15]$$

$$\ell(v) = \int_{\Omega} R(x, t) v(x, t) dx \quad [16]$$

con $t \in [0, T]$.

Esto significa que el problema variacional corresponde a encontrar una función $w \in H_D^1(\Omega)$, tal que:

The problem proposed to solve is to find a function $w \in H^1(\Omega \times [0, T])$ such that satisfies:

$$w_t - D \cdot \Delta w + \text{div}(\vec{V} w) = R, \text{ for } x \in \Omega, \text{ and for every } t \in [0, T], \quad [9]$$

$$\gamma_{D_x} w = 0, \text{ for } x \in \Gamma, \text{ and for every } t \in [0, T], \quad [10]$$

$$\gamma_{D_x} w = R, \text{ for } t=0, \text{ and for every } x \in \Omega. \quad [11]$$

where $D \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ is a constant, \vec{V} is a vector field in $[C^\infty(\Omega \times [0, T])]^2$ and R is a scalar field in $C^\infty(\Omega \times [0, T])$.

2.3 Weak formulation

In this section, we present the same equations shown on section 2.2 on his **VARIATIONAL FORM**, over the correct space. This paper would not describe the rigorous mathematical analysis work to get this, so it is going to show only the main results.

2.3.1 Wind

Let $\alpha: [H^1(\Omega)]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ and $b: H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ be two linear functions defined for every $\phi, v \in H^1(\Omega)$ as:

$$\alpha(\phi, v) = \int_{\Omega} \langle \nabla \phi, \nabla v \rangle dx, \quad [12]$$

$$b(v) = \int_{\Gamma_2} c \gamma_D(v) dx - \int_{\Gamma_1} c \gamma_D(v) dx \quad [13]$$

Note that $\gamma_D(v)$ represents the value of the function v over the integration region, in this case the boundary of the domain. Then, the variational formulation of the wind problem is defined as find a function $\phi \in H^1(\Omega)$ such that:

$$\alpha(\phi, v) = b(v), \text{ for every } v \in H^1(\Omega) \quad [14]$$

2.3.2 Convection-Diffusion of pollutants

Let $\alpha: [H_D^1(\Omega)]^2 \rightarrow H^1([0, T])$ and $\ell: H_D^1(\Omega) \rightarrow H^1([0, T])$ be defined for all $w, v \in H_D^1(\Omega)$ as:

$$\alpha(w, v) = D \int_{\Omega} \langle \nabla_x w(x, t), \nabla_x v(x, t) \rangle dx - \int_{\Omega} \langle \vec{V}(x, t) w(x, t), \nabla_x v(x, t) \rangle dx \quad [15]$$

$$\ell(v) = \int_{\Omega} R(x, t) v(x, t) dx \quad [16]$$

where $t \in [0, T]$.

This means that the variational formulation is to find a function $w \in H_D^1(\Omega)$, such that:

$$\alpha(w;v)=\ell(v), \text{ para todo } v \in H_b^1(\Omega) \quad [17]$$

Donde H_b^1 es una variación del espacio H^1 , para definir correctamente las condiciones de borde.

3. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En este artículo se presentan tres resultados importantes para el problema definido en la sección 2: existencia y unicidad de la solución, resolución por método de elementos finitos para el problema del viento y de la ecuación de difusión-convección.

3.1 Existencia y unicidad de la solución

Al momento de trabajar en cualquier modelo matemático, es de gran interés que bajo las condiciones y supuestos físicos en que se trabaja, siempre exista al menos una solución. La existencia de una solución es un tema muy importante, que muchas veces se puede verificar de manera teórica, antes de resolver el problema numéricamente. En caso de que no exista, se estaría trabajando en un problema infactible y carecería de interés su resolución. Sin embargo, no solo es importante la existencia de solución en el modelo, sino que también, es bueno tener una, y solo una, solución ya que de esta manera se asegura consistencia entre la solución encontrada del modelo y se evitan problemas de ambigüedad. Si existiera más de una solución, puede que teóricamente se trabaje con una, pero en la práctica sea otra, lo que podría ocasionar alguna confusión al momento de analizar los datos. En particular en los problemas definidos en la sección 2.3, se podrían tener infinitas combinaciones lineales convexas que también resuelvan el modelo que estamos estudiando, por lo que es imperante exigir una única solución.

Es por esto, que con ayuda de la teoría matemática se busca asegurar estas dos condiciones para los problemas variacionales definidos en la sección 2.3. Se pueden describir algunas propiedades para los operadores $\alpha(\cdot, \cdot)$ y $\ell(\cdot)$, tal que se asegure la existencia y unicidad de la solución de nuestro modelo. Sin mayor detalle en las demostraciones matemáticas, se puede concluir que $\ell(\cdot)$ es un **OPERADOR LINEAL CONTINUO** en su dominio y $\alpha(\cdot, \cdot)$ es un operador bilineal continuo en su dominio, debido a la linealidad de la integral y de la desigualdad de Cauchy-Schwarz [5]; bajo la misma línea, el operador $\alpha(\cdot, \cdot)$ es un operador elíptico, gracias a los supuestos sobre el campo de velocidades y de la desigualdad de Poincaré [5]. Estas propiedades sobre los operadores en el problema variacional, nos permiten concluir que existirá una, y solo una, solución al problema planteado, ya que se cumplen todas las condiciones pedidas por el Teorema de Lax-Milgram [5]. Este mismo análisis se hace al problema del campo de velocidades.

$$\alpha(w;v)=\ell(v), \text{ for every } v \in H_b^1(\Omega) \quad [17]$$

where H_b^1 is a variation of space H^1 , to correctly define the boundary conditions.

3. RESULTS AND DISCUSSION

In this section, we present some important results for the problem defined on section 2: existence and uniqueness of the solution and solving the wind problem and the convection-diffusion equation by the finite element method.

3.1 Existence and uniqueness of the solution

When analyzing any mathematical model, it is very important to show, at least, the existence of one solution for the problem. This is a main issue, since it can be shown before solving the problem numerically. In case that there is not such solution, it will be an infeasible problem, so that, a non-interesting problem. Nevertheless, the existence of the solution is not the only important thing, but also the uniqueness of the solution, giving consistency to the model's solution and avoiding ambiguity issues. If there is more than one solution, it could be some troubles: theoretically could be used one solution, but the numerical solution be other one, and then, misleading analysis. A further discussion is presented at the scientific principle section, at the end of this paper.

For this reasons, with a mathematical approach we look to assure this two conditions of existence and uniqueness for the variational problems defined on section 2.3. Leaving aside mathematical rigour, it can be shown that $\ell(\cdot)$ is a **CONTINUOUS LINEAR OPERATOR** on his domain and $\alpha(\cdot, \cdot)$ is a continuous bilinear operator, due to linearity of the integral and Cauchy-Schwarz inequality [5]. On the same side, the operator $\alpha(\cdot, \cdot)$ is an elliptic operator under the assumptions over the velocity field, using the Poincaré inequality [5]. These properties over the operator on the variational problem, allow to conclude the existence and uniqueness of the solution to the problem defined in section 2.3, since every condition is checked in Lax-Milgram theorem [5]. The analysis for the problem of the wind is completely analogous.

Once established the existence and uniqueness of the solution for the model presented, it has to be developed a computational routine to let us find numerically the solution wanted on the weak formulation problems. On this paper, it is developed the finite element method, which was entirely programmed in Python. For this method, the first step is to discretize the domain of work, taking care

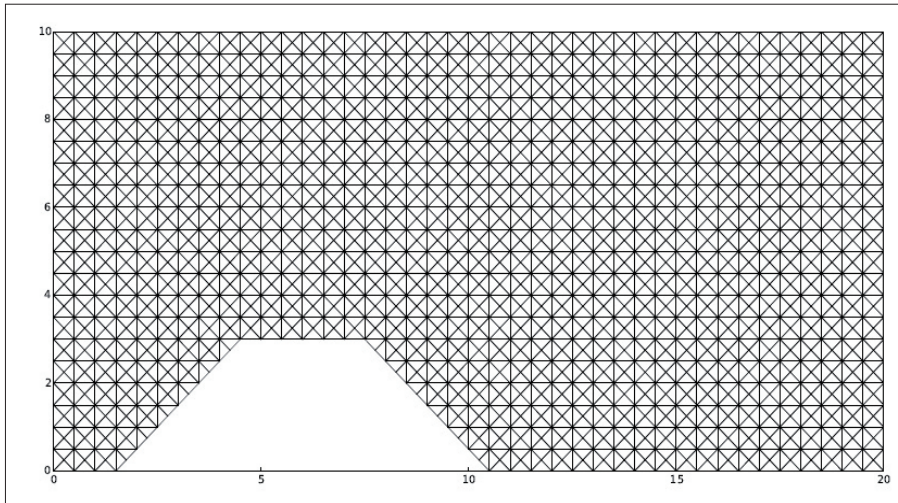


Figura 2. Ejemplo de una malla realizada con ancho 20 y altura 10.

Figure 2. Example of a mesh generated of width 20 and height 10.

Una vez establecida la existencia y unicidad de la solución del modelo planteado, se debe desarrollar un método computacional que nos permita encontrar numéricamente la solución buscada. Para este caso, usaremos el método de elementos finitos, el cual fue desarrollado en Python. Para este método, es necesario comenzar discretizando el espacio de trabajo, preocupándose en la forma del volcán, generando una malla como se puede observar en la **Figura 2**, para poder aplicar correctamente el método a los problemas variacionales definidos en la sección 2.3.

3.2 Campo de velocidades del viento

El primer objetivo corresponde tener valores numéricos para el flujo potencial del campo de velocidades del viento en el modelo matemático que se está estudiando. Esto se obtiene al resolver el problema definido en la sección 2.3.1 con el método de elementos finitos.

Para poder relacionar la solución ϕ con el campo de velocidades \vec{V} , se utiliza una aproximación realizada por mínimos cuadrados para obtener el vector gradiente de ϕ y, así, tener una discretización certera para el campo de velocidades que era la variable de nuestro interés.

Sobre el mallado presentado en el método de elementos finitos, se puede notar que es importante el tamaño de la partición. Mientras más pequeña sea la partición, más detallada será la información que se entrega y, se busca que sea más correcta. En la **Figura 3**, se muestran gráficamente los campos de velocidades para dos mallas de distinto tamaño de partición. Se puede apreciar que la imagen de la derecha al tener un mallado más fino, entrega mayor información y esto ocasiona que sea una aproximación más certera de las direcciones del viento en comparación con la imagen de la izquierda, la cual se desarrolló con un mallado más grueso, sin embargo, con la ventaja de ser mucho más rápida de computar.

of volcano's shape. It generates a mesh as in **Figure 2**, to correctly apply this method over the variational problems on section 2.3.

3.2 Wind velocity field

The first objective is solving numerically the wind's problem, giving a numerical solution for the potential flow of the velocity field. This is achieved using finite element method to the problem defined on section 2.3.1. To relate the numerical solution ϕ with the velocity field \vec{V} , an approximation by least squares is used to get the gradient vector of ϕ , and then, a discretization of the velocity field, which is the parameter wanted.

It's important to note that the mesh size matters in the accuracy of the numerical solution. The smaller the mesh size, more accurate the solution and, therefore, more correct. The **Figure 3**, shows graphically two meshes of different mesh size: the right one has a finer partition, giving more detailed information and, so, more accurate approximation of wind directions than the left one, which has a greater mesh size. However, the left one is faster to compute.

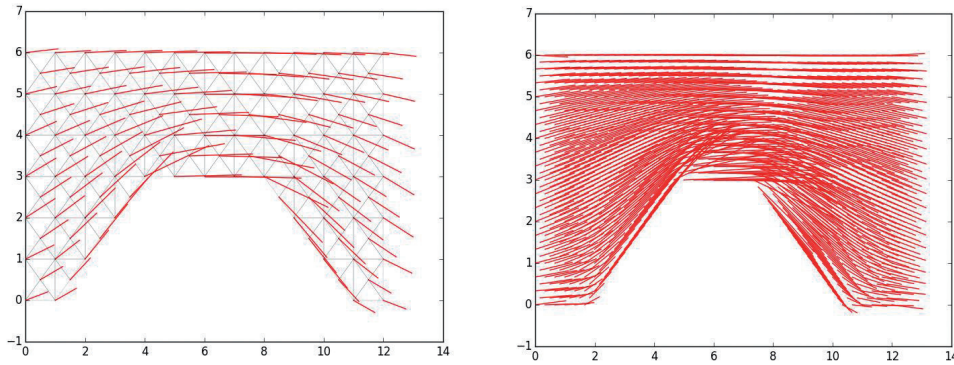


Figura 3. Representación de campos de velocidad generados para flujos potenciales.

Figure 3. Velocity field representation generated for potential flows.

3.3 Niveles de concentración de contaminación en la erupción volcánica

Una vez que el campo de velocidades fue encontrado, se posee toda la información necesaria para resolver el problema definido en la sección 2.3.2, a través del método de elementos finitos, en la que se puede usar, a modo de prueba, el valor del coeficiente de difusión $D=0,00176$, el cual es similar al coeficiente asociado al oxígeno en el aire en este tipo de circunstancias y en este caso la concentración de contaminantes estaría medida en $10^{-2}mol/m^2$, ya que se está trabajando en dos dimensiones. Además, se usa para fines de testeo la función $R(x,t)=4-x_2$, definida sobre la cima del volcán como la emisión de contaminantes al momento de la erupción.

En la **Figura 4**, se puede observar como comienzan a aumentar los niveles de concentración en el aire, en los lugares cercanos al cráter del volcán. Y avanzando en el tiempo, se puede observar como en la **Figura 5** hay una mayor variedad en los niveles de concentración en el espacio, identificando una nube de contaminantes, que al mismo tiempo que se expande (producto de la constante de difusión D) se mueve en relación al viento (debido a la convección producida por el campo de velocidades del viento).

3.3 Concentration levels of pollution in the volcanic eruption

Once the velocity field was found, all the information needed is possessed to solve the problem defined in section 2.3.2, through the finite element method. For this problem it is used a constant value $D=0,00176$ for the diffusion coefficient, which is similar in value to this coefficient associated to the oxygen in the air over this kind of circumstances. In this case, we are measuring the concentration in $10^{-2}mol/m^2$, since it is only two dimensions. Also, for testing purposes, it's used the function $R(x,t)=4-x_2$, defined on the top of the volcano, as the pollutants' emission generated by the volcanic eruption.

On **Figure 4**, it can be seen the beginning of the volcanic eruption and the increasing of concentration levels of pollutant on air, nearby the volcano's crater. As time elapses, in **Figure 5** it can be seen a wider variety of concentration levels on space, identifying a pollutant cloud, expanding (according to the diffusion constant D) and moving by wind's influence (according to the convection produced by the velocity field).

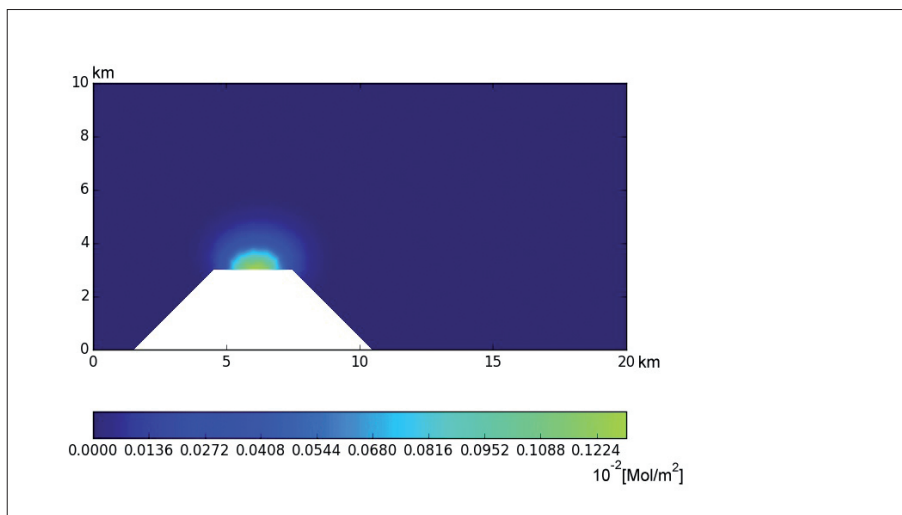


Figura 4. Gráfico de los niveles de concentración en la contaminación al comienzo de la erupción volcánica.

Figure 4. Level of pollutants' concentration graph at the beginning of the volcanic eruption.

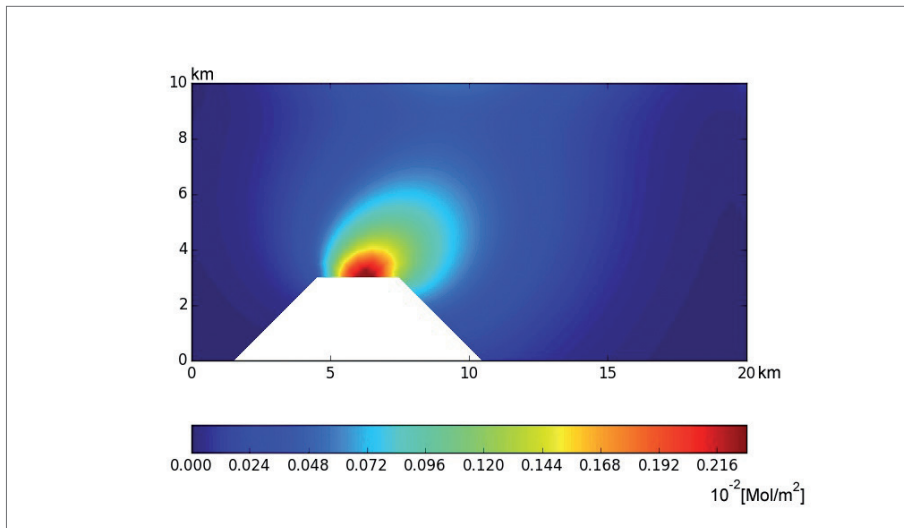


Figura 5. Gráfico de los niveles de concentración en la contaminación después de un tiempo del comienzo de la erupción volcánica.

Figure 5. Level of pollutants' concentration graph, while volcanic eruption happens.

Es importante notar que, utilizando los valores de la concentración de contaminantes en el aire, para cada posición en el espacio, es posible analizar qué tan lejos pueden llegar los niveles altos de concentración de contaminantes y puedan afectar a la salud de los habitantes. Junto a esto, se puede llegar a realizar un plan de evacuación temprana efectiva en los pueblos aledaños al volcán, donde los habitantes tengan riesgo de problemas respiratorios y salud, producto de los altos niveles de contaminantes.

Con toda esta información, se espera poder ser un avance en el análisis de estos fenómenos y poder crear nuevas metodologías que permitan establecer planes de evacuación efectivos y conocer mejor el fenómeno en cuestión, como es la erupción volcánica y la concentración de contaminantes en el aire.

4. CONCLUSIONES

En los resultados de este trabajo, se pudo ver que en el modelo presentado, descrito a través de la ecuación de convección-difusión, se tiene existencia y unicidad en la solución a buscar, en función de los parámetros iniciales a ocupar (como lo son la constante de difusión D , el agente externo R , la condición de borde para el potencial de la velocidad c), cuestión que se discutió en la sección anterior como un punto muy importante a considerar. Esto permite saber que sus soluciones serán acertadas para parámetros adecuados y, debido a que utilizamos valores reales atinentes a la situación a estudiar, los resultados se mantienen consecuentes al modelo.

Por supuesto, este es un modelo inicial para estudiar el fenómeno de contaminación en una erupción volcánica, por lo que hay muchas mejoras que se pueden hacer a este modelo que lo hagan mucho más cercano a la realidad y, así, tener un mejor análisis de los datos obtenidos.

It's important to note that, using the numerical solution for pollutant concentration on air, for each position on space, it's possible to analyze how far can reach the high level of toxic gases, affecting people's health. With this, an effective early evacuation plan can be designed for people living nearby of volcano, checking where concentrations levels of pollution are risky to humans.

With all this information, it is expected to be a contribution on the analysis for this phenomena and create new methodologies for evacuation plans.

4. CONCLUSIONS

In the results of this research, it could be seen that in the presented model, which was described through the convection-diffusion equation, there is an existence and uniqueness in the solution to be found, according to the initial parameters to be used (such as the diffusion constant D , the external agent R , the boundary condition for the potential speed c), matter that was discussed in the previous section as an important issue to bear in mind. This allows knowing that the solutions for the model will be correct for adequate parameters and, due to the fact that we use values that are really relevant to the situation to be studied, the results remain consistent to the model.

Of course, this is an initial model to study the contamination phenomena produced by a volcanic eruption, therefore many improvements can be made to it that would make them much more close to reality, so as to have a better analysis of the obtained data.

Mirando a futuro, una de las principales extensiones de este trabajo sería analizar en mayor profundidad las cotas de error para las discretizaciones. Se debe estudiar el error de aproximación tanto en la posición como en el tiempo, además de encontrar relaciones entre ellas para poder optimizar la cota de error y lograr un menor tiempo de ejecución. Otro objetivo a futuro sería obtener gráficos comparativos en función del número de particiones y los valores entregados en la solución numérica. Por otra parte, también está como desafío disminuir algunos supuestos físicos, principalmente los relativos al campo de velocidades. Se podría exigir solo fluido incompresible, de tal forma, que se pueda trabajar con las ecuaciones de Navier-Stokes para fluidos incompresibles, aunque esta opción trae problemas con las tasas de cambio de la presión en el espacio.

Por último, también se puede extender el modelo matemático ampliando las condiciones del problema físico, buscando estudiar más comportamientos en el fenómeno y con más detalle. Algunos ejemplos podrían ser el peso de las partículas, tener viento variable y trabajar en tres dimensiones del espacio.

One of the most important extensions of this research would be to analyze more deeply the ratio of error for the discretization. The approximation error has to be studied both in the position and the time, along with finding relations among them to optimize the ratio of error and to achieve a better execution time. Another objective in the future would be to obtain comparative charts regarding the number of partitions and the values provided by the numeric solution. On other hand, it remains as a challenge to decrease some physical assumptions, mainly the ones regarding the velocity field. Only incompressible fluid could be demanded, in such a way that one could work with the Navier-Stokes equation for incompressible fluids, although this option carries with it a number of problems with the exchange pressure ratio in the space.

Finally, the mathematical model can also be extended by enhancing the conditions of the physical problem, looking to study further behavior in the phenomenon with more detail. Some examples could be the weight of the particles, to have variable wind and to work in three dimensions.

GLOSARIO

COLUMNA DE CENIZAS: corresponde al chorro de gas expulsado por el volcán durante una erupción. Este gas está formado mayoritariamente por vapor de agua, pero cerca del 25% está conformado de gases tóxicos como dióxido de carbono, dióxido de azufre y emisiones ácidas como ácido clorhídrico, ácido fluorhídrico, entre otros [4].

FORMA VARIACIONAL: también llamado problema variacional o formulación débil de una ecuación diferencial, corresponde a una herramienta que nos permite relacionar el área de álgebra lineal y análisis funcional, para resolver problemas en otras áreas, como lo son los problemas con ecuaciones diferenciales parciales. En la formulación débil, se usan funciones test y se busca que una ecuación se cumpla en un determinado espacio, pero en el sentido débil, por lo que podría no cumplirse en todos los puntos.

OPERADOR LINEAL CONTINUO: es una función entre espacios vectoriales normados que mantiene las operaciones internas (transformación lineal) y que, además, es acotado en el sentido de la norma del espacio de llegada. Esta definición se puede extender fácilmente a un operador bilineal continuo, al ser lineal continuo para cada una de las variables que tiene de dominio el operador.

GLOSSARY

ERUPTION COLUMN: the stream of gas expelled by the volcano during an eruption. This gas is mostly composed of steam, but about 25% is composed by toxic gases such as carbon dioxide, sulfur dioxide and acid emissions such as hydrochloric acid, hydrofluoric acid, among others [4].

VARIATIONAL FORM: also known variational problem or weak formulation of a differential equation. It is the tool that allows relating linear algebra and functional analysis, to solve problems in other fields, such as with partial differential equations. In weak formulation, test functions are used and the purpose of it is to find an equation that works within a determined space. All of these in the weak sense, reason that could lead into the equation not meeting all the points.

CONTINUOUS LINEAR OPERATOR: it is a function between norm vector spaces that maintain the internal operations (linear transformation) and that is defined in the sense of the norm of the arriving space. This definition can be easily extended to a bilinear continuous operator, by being continuously linear for each of the variable that has as a domain the operator.

PRINCIPIO CIENTÍFICO

La idea del método de elementos finitos, es tomar un subespacio de funciones finito e ir intentando aproximar la solución real de alguna ecuación diferencial parcial (del espacio) por una del subespacio de dimensión finita. Una vez que el problema está formulado de esta forma, se llega a un sistema de ecuaciones de la forma $Ax = b$, que se puede solucionar fácilmente mediante un programa computacional. Al hacer esto, no es trivial el hecho de que se pueda encontrar la solución y, menos aún, que esta sea única. Por ello es necesario el análisis previo intentando usar los teoremas conocidos en este ámbito, como el teorema de Lax-Milgram, usado en esta investigación, o Teoría de Babuska-Brezzi, para métodos más complicados. Estos dos teoremas aseguran existencia y unicidad de las soluciones de la ecuación.

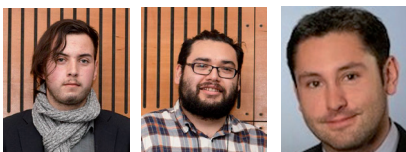
La unicidad de una solución no es un tema menor, por ejemplo, se podrían tener dos soluciones para una ecuación diferencial, usando un método de aproximación se llega a una sola, el problema es cuál. Nótese que se puede llegar a cualquier combinación lineal (convexa o no) de ambas, las cuales son infinitas.

La idea de este artículo es utilizar un método simple para poder aproximar el fenómeno volcánico, que es de gran importancia para Chile. De manera preliminar se analiza en dos dimensiones, para poder estudiar los beneficios de programar un nuevo modelo, pero en 3D.

REFERENCES

1. KELLER, Gerta. "The Cretaceous-Tertiary Mass Extinction, Chicxulub Impact, and Deccan Volcanis". En: TALENT, John (ed). *Earth and Life*. 1. New York: Springer, 2012. p. 759-793.
2. DOOCY, Shannon *et al.* "The Human Impact of Earthquakes: a Historical Review of Events 1980-2009 and Systematic Literature Review". *PLoS Currents: Disasters* [en línea]. 2013, vol 5. Disponible en: <http://currents.plos.org/disasters/article/the-human-impact-of-earthquakes-from-1980-2009-a-historical-review-of-events-1980-2009-and-systematic-literature-review> [consulta: 14 Mayo, 2016]
3. Red de vigilancia volcánica. Sernageomin. [online]. 2015. [Consulta: 13 de dic. de 2015]. Disponible en: <http://www.sernageomin.cl/volcanes-mapas.php>
4. Organización Panamericana de la Salud. *Módulo 4: Salud ambiental y el riesgo volcánico*. Quito, Ecuador : Pangea Editorial, 2005. ISBN 9978-44-054-2
5. STEINBACH, Olaf. *Numerical approximation methods for elliptic boundary value problems*. New York : Springer, 2012. ISBN 978-0-387-68805-3
6. BOFFI, Daniele y GASTALDI, Lucia. "Analysis of Finite Element Approximation of Evolution Problems in Mixed Form". *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 2004. Vol. 42, no. 4, p. 1502-1526.

EQUIPO DE INVESTIGADORES / RESEARCH TEAM



Maximiliano Arancibia Matías San Martín Carlos Jerez

SCIENTIFIC PRINCIPLE

The idea of the finite elements method is to take a subspace of finite functions and to try to approximate the real solution of a partial differential equation (of space for one of the subspace of finite dimension). Once the problem is formulated in this way, an equation system is reached, that can be easily solved by means of a computer program. When doing this, it is important to bear in mind the fact that a solution can be found and even more important the fact that this solution is unique. The previous analysis trying to use the existent theorems in this field, such as the Lax-Milgram theorem, used in this research, or the Babuska-Brezzi theory, for more complicated methods, was necessary. These two theorems assure the existence and uniqueness of the solutions for the equation.

The uniqueness of a solution is not a minor subject, for example, one could have two solutions for a differential equation, using an approximation method only one is reached, and the issue is which one of those two. It has to be noticed that any lineal combination can be reached (be it convex or not), of both which are finite.

The purpose of this paper is to use a simple method to be able to approximate the volcanic phenomenon, something of great importance for Chile. Preliminarily, the phenomenon is analyzed in two dimensions, to study the benefits of programming a new 3D model.