PRECONDICIONAMIENTO OPERACIONAL PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE FRACTURA EN 2-D UTILIZANDO ELEMENTOS DE FRONTERA

Carolina Urzúa, Carlos Jerez

Pontificia Universidad Católica de Chile, Escuela de Ingeniería.

Carolina Urzúa, estudiante de la Escuela de Ingeniería y cursa la especialidad de Ingeniería Civil Industrial, con diploma en Matemáticas.

Carlos Jerez, profesor (Ph.D.) recién llego a nuestra Escuela luego de realizar su postdoctorado en ETH Zurich, Suiza, y su doctorado en l'École Polytechnique, Francia.

Contacto: Carlos Jerez - cjerez@ing.puc.cl

INTRODUCCIÓN

Los desafíos del mundo moderno han llevado a físicos, matemáticos e ingenieros a estudiar distintos métodos de resolución de ecuaciones diferenciales parciales, como los elementos finitos (FEM) y elementos de frontera (BEM), entre muchos otros. Evidentemente, todos estos métodos tienen sus fortalezas y debilidades y, acorde a las mismas, el contexto que favorece su aplicación.

En particular, para el caso de los elementos de frontera, pasamos de resolver una ecuación diferencial a una ecuación integral, utilizando para ello los operadores simple capa y doble capa, con la ventaja de que estos satisfacen las identidades de Calderón y, de este modo, se simplifica su resolución y obtenemos precondicionadores, facilitando así su implementación computacional.

Entre los muchos usos que se le da a los elementos de frontera, se encuentra el análisis del efecto que tienen obstáculos en lo que, en condiciones ideales, son campos uniformes, como es el caso de la difracción de ondas en un objeto rígido (por ejemplo para diseñar un radar). Sin embargo, en muchos de estos problemas los obstáculos son demasiado finos, como es el caso de las fracturas, por lo que la complejidad del problema aumenta.

El precondicionamiento de Calderón ha sido utilizado exitosamente en el pasado para la resolución de integrales de frontera sobre superficies sin borde [1,2]. La situación cambia drásticamente cuando se consideran fronteras abiertas como ocurre en el caso de fracturas o pantallas. De hecho, las identidades de Calderón fallan debido a la desaparición del operador doble capa y su adjunto. Por otro lado, los operadores singulares restantes ya no transforman los espacios fraccionales de Sobolev en una forma dual, sino que degeneran en distintos subespacios acorde a su extensibilidad por cero.

Recientemente, Jerez-Hanckes y Nédélec [3], demostraron que descomponiendo la solución de volumen en un salto y un promedio se obtienen resultados de coercividad precisos en los espacios fraccionales de Sobolev asociados y se caracteriza el desajuste que ocurre entre ellos. Más aún, los autores presentan una forma explícita y exacta para las formulaciones variacionales cuando se considera un intervalo abierto. Del mismo modo, se presentan sus formulaciones inversas y se definen naturalmente relaciones de tipo Calderón para cada caso. Este trabajo consiste en estudiar principalmente la implementaciów numérica de dichos operadores actuando como precondicionadores y discutir sus futures extensiones.

EXPERIMENTACIÓN

Se implementaron los 4 operadores definidos en Jerez-Hanckes y Nédélec [3] , utilizando el software Matlab. Para estos fines se aproximaron las funciones en el espacio de Sobolev $H^{1/2}$ por funciones lineales contínuas y las funciones en el espacio $H^{-1/2}$por constantes y de este modo se planteó la formulación variacional de los operadores.

En la discretización de los operadores, en vez de utilizar una partición uniforme de puntos en el intervalo (-1,1), se utilizaron las raíces de los polinomios de Tchebyshev, debido a que ésta partición es más fina en los puntos borde del intervalo y con ello, obtenemos más información sobre lo que está ocurriendo en los puntos más sensibles de los operadores. Aún así se llevaron a cabo pruebas comparativas de la convergencia con ambas discretizaciones, corroborando la teoría de que la segunda presenta una mejor precisión.

Por su parte, para calcular la matrices de los operadores, se utilizaron tanto métodos analíticos como numéricos. Para el caso de la integración numérica se recurrió a la cuadratura de Gauss-Legendre.

Finalmente se llevaron a cabo diversos experimentos numéricos con el fin de verificar el comportamiento de las identidades de tipo Calderón planteadas para los operadores. Para ello se utilizaron los polinomios de Tchebyshev, tanto de primer como de segundo orden, sacando provecho a sus propiedades, ya que ellas establecen relaciones que nos permitieron determinar exactamente qué función debíamos obtener para un input determinado. Asimismo, la medición del error se llevo a cabo utilizando las normas de energía inducidas por las propiedades de continuidad y coercividad de los operadores L_1 y L_2 .

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Se demostraron empíricamente las relaciones de tipo Calderón planteadas en Jerez-Hanckes y Nédélec [3].

A continuación se muestra la convergencia lograda para el operador L_2

$$L_2 = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\log\left[\frac{M(x,y)}{|x-y|}\right]dxdy$$

Donde:

$$M(x,y) = \frac{1}{2}((x-y)^2 + (w(x)+w(y))^2)$$

y

$$w(x) = \sqrt{1-x^2}$$

"el método de resolución planteado está ahora al servicio de las diferentes ramas de la ingeniería"

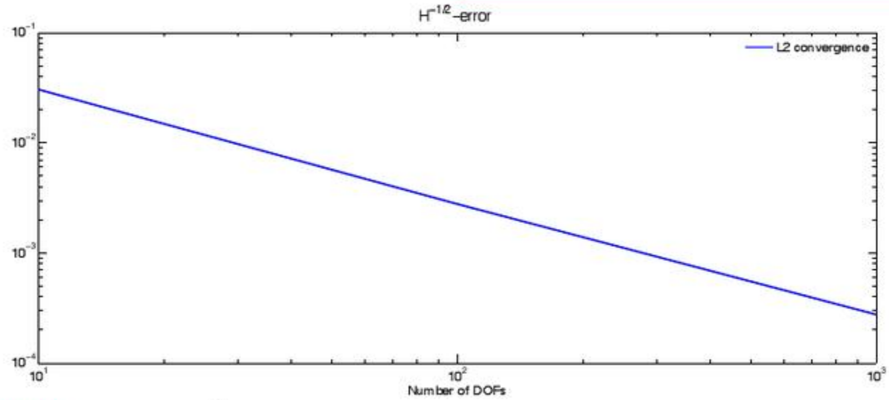

Figura 1: Error en norma $H^{-1/2}$ de la solución de la formulación variacional para el operador L_2

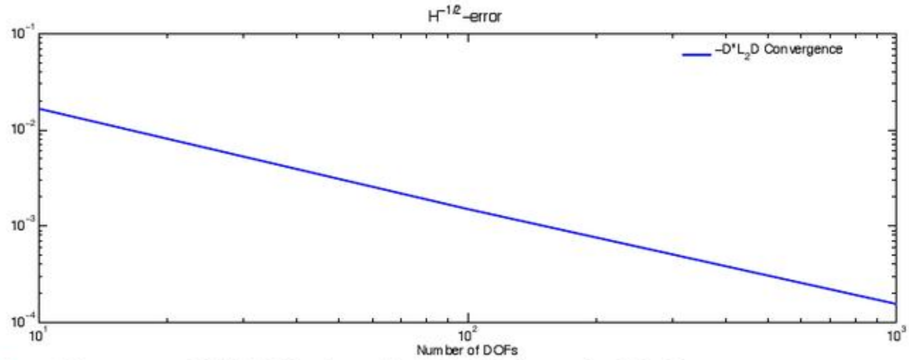

Figura 1: Error en norma $H^{-1/2}$ de la diferencia entre la solución de L_1^{-1} y operador $-D^* L_2 D$

CONCLUSIONES

El trabajo desarrollado nos permite, en primer lugar, corroborar de forma empírica que la teoría planteada por Jerez-Hanckes y Nédélec [3] es correcta e implementable numéricamente con una aceleración de los algoritmos iterativos para ecuaciones integrales más que significativa. Consecuentemente el método de resolución planteado está ahora al servicio de las diferentes ramas de la ingeniería, pudiendo resolver desde problemas de fracturas hasta cosas tan delicadas como implantes biomedicos y teniendo la posibilidad de extenderse a problemas aún más generales.

AGRADECIMIENTOS

Se agradece al Prof. Dr. Jean-Claude Nédélec por sus comentarios y aportes científicos.

REFERENCIAS

1. BUFFA, A., Christiansen, S., The Electric Field Integral Equation on Lipschitz screens: definitions and numerical approximation. Numerische Mathematik 94: 229-267, 2003.
2. HIPTMAIR, R., Operator Preconditioning. Computers and Mathematics with Applications 52: 699-706, 2006.
3. JEREZ-HANCKES, C. and Nédélec, J.-C., Variational forms for the inverses of integral logarithmic operators over an interval. Comptes Rendus Mathematique 349: 547-552, 2011.