



Modelación matemática de escurrimientos en canales abiertos con cavidad lateral rectangular

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA

José Galaz¹, Alumno de sexto año

Maricarmen Guerra², Ingeniero de Proyectos

Rodrigo Cienfuegos², Profesor Asociado

¹PROGRAMA DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

²DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA HIDRÁULICA Y AMBIENTAL

INTRODUCCIÓN

Escurrecimientos que interactúan con cavidades laterales, como por ejemplo, **meandros** recortados en ríos, bahías naturales, o puertos, entre otros, tienen especial importancia en la naturaleza y en ingeniería. Las cavidades laterales juegan un importante rol en la preservación de hábitats ecológicos ya que, por ejemplo, una errónea estimación del campo de velocidades podría afectar la manera en que nutrientes y sedimentos debieran ser tratados y, finalmente, obstruir en vez de facilitar el buen desarrollo del ecosistema [1]. Al mismo tiempo, existen fenómenos físicos, como la resonancia de ondas atrapadas en la cavidad, que pueden provocar amplificaciones de ondas y generar inundaciones imprevistas.

Sin embargo, el comportamiento de las variables hidrodinámicas que describen al escurrimiento en cavidades es de alta complejidad. Riviere et al. [2] observaron la formación de celdas de recirculación de vorticidad vertical positiva, mientras que Kimura et al. [3] evidenciaron la formación de pequeños

vórtices en la interfaz canal-cavidad, que excitaron oscilaciones periódicas estacionarias de la superficie libre. Lo anterior fue caracterizado por Mizumura et al. [2], reportando de sus experimentos que la generación de vórtices era difícil de notar para escurrimientos con números de Froude muy bajos (e.g. 0,1), pero que generaba una clara activación de la cavidad para **números de Froude** más importantes (e.g. 0,8), lo cual también verificaron Wolfinger et al. [4]. Enfoques numéricos han sido también explorados utilizando para distintos casos modelos 2D y 3D, como aproximación a las ecuaciones de **Navier-Stokes** (N-S, [1], [3], [5]) obteniendo resultados que son comparables a los experimentales.

En esta investigación se han estudiado simulaciones con un modelo matemático que obedece a una simplificación 2D de las ecuaciones de N-S [6], con el propósito de explorar la caracterización de las principales propiedades del flujo: formación de vórtices, patrón de recirculación y oscilación de la superficie libre.

METODOLOGÍA

En estricto rigor, las características del escurrimiento debieran ser resueltas a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes, pero dada su complejidad y el costo computacional que implica resolverlas, típicamente se adoptan versiones simplificadas de éstas. Por ejemplo, Kadotani et al. [6] utilizaron un modelo Large Eddy Simulation (LES) para estimar las estructuras 3D del flujo; Kimura et al [3], en cambio, una versión 2D, integrada en la dirección vertical, pero que considera la mezcla turbulenta y la **viscosidad molecular**.

Otra aproximación válida para escurrimientos someros es el de las *Non-Linear Shallow Water Equations* (NSWE), las que permiten asumir una **distribución hidrostática de presiones** en la dirección vertical pero desprecian los efectos de la viscosidad. Estas ecuaciones son:

$$\begin{aligned} (h)_t + (hu)_x + (hv)_y &= 0 \\ (hu)_t + \left(\frac{1}{2}gh^2 + hu^2\right)_x + (huv)_y &= -ghz_x \\ (hv)_t + (huv)_x + \left(\frac{1}{2}gh^2 + hv^2\right)_y &= -ghz_y \end{aligned} \quad (1)$$

Donde los subíndices indican derivadas parciales; t representa el tiempo, h es la altura de la columna de agua; u y v las componentes de la velocidad en las direcciones horizontales x e y; $g = 9,81\text{m/s}^2$ es la aceleración de gravedad; y $z = z(x,y)$ es la altura del fondo del canal respecto a algún sistema de referencia.

En este trabajo, estas ecuaciones fueron integradas utilizando el modelo SurfWB-UC, un software desarrollado por Guerra [6] en rutinas de Fortran90. Este utiliza un esquema numérico de volúmenes finitos [7] sobre una malla curvilínea para resolver las NSWE (Eq. 1), y el algoritmo de reconstrucción hidrostática propuesto por Marche et al. [8] que permite preservar estados de reposo en presencia de alta variabilidad de la altura del fondo $z(x,y)$.

Se estudiaron dos casos presentes en la literatura [2], [3], examinando además el efecto que la discretización del dominio y la condición inicial tienen en el resultado. Las propiedades geométricas del canal se muestran en la Figura 1 y los valores para cada caso en la Tabla 1. Ambos canales son horizontales. Además, como condición inicial se impuso un **caudal unitario** q_0 con profundidad h_0 en el canal y reposo con profundidad h_1 en la cavidad; como condición de borde se impuso aguas arriba un caudal unitario constante q_0 y aguas abajo una profundidad constante h_0 usando la estrategia propuesta por Cienfuegos et al. [9] y Sanders [10]; los otros muros del canal se definieron asignando a la topografía una cota de 1 m. Los valores correspondientes para h_0 , h_1 y q_0 se muestran en la Tabla 2. Notar que los casos 1-1 y 1-2 sólo difieren en la altura h_1 impuesta al interior del canal, mientras que los casos 1-2 y 1-3 en el tamaño Δx , Δy de las celdas de cálculo (ver Tabla 1), esto será justificado en la siguiente sección.

Tabla 1. Propiedades geométricas del canal y de la malla de cálculo correspondientes a los casos estudiados (ver la Figura 1 para la definición de las variables geométricas del canal).

Caso	L1 (cm)	L2 (cm)	L3 (cm)	b (cm)	W (cm)	Δx (cm)	Δy (cm)
1-1	200	30	200	30	30	4	1
1-2	200	30	200	30	30	4	1
1-2	40	30	60	30	30	0,5	0,5
2	30	15	30	15	15	0,25	0,25

Tabla 2. Parámetros de la condición inicial impuesta al flujo en cada uno de los casos estudiados. $v=10^{-6}$ m²/s.

Caso	$Q=q_0b$ (cm ³ /s)	h_0 (cm)	h_1 (cm)	$u_0=q_0/h_0$ (cm)	$Fr=u_0/(gh_0)^{1/2}$	$Re=u_0h_0/v$
1-1	3500	7,0	7,00	16,67	0,20	11667
1-2	3500	7,0	6,93	16,67	0,20	11667
1-3	3500	7,0	6,93	16,67	0,20	11667
2	255	1,0	0,99	25,50	0,81	2781

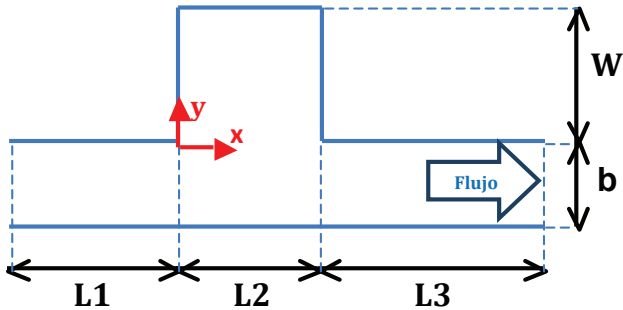


Figura 1. Parámetros de la geometría del canal.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En el caso 1-1, debido a que las NSWE no incorporan el mecanismo físico para excitar el movimiento en la cavidad (que corresponde a las fuerzas de corte debidas a la viscosidad molecular o turbulencia), el sistema se mantuvo estacionario, como si la cavidad no existiera. Sin embargo, considerando la artificialidad de esta condición inicial, se prefirió utilizar $h_1 = 0,99h_0$ para generar un gradiente de presión que forzara la cavidad a comunicarse con el flujo principal (caso 1-2), con el objetivo de establecer un régimen estacionario. En efecto, fue posible generar el movimiento al interior de la cavidad pero, luego de siete segundos, esta volvió a la condición inicial de reposo. El caso 1-3, en cambio, evidencia la importancia de la discretización del dominio: al utilizar una malla más fina fue posible la generación de los vórtices en la interfaz y generar un movimiento más interesante al interior de la cavidad, disminuyendo los efectos que la **difusión numérica** [11] tiene en los resultados (ver Figura 2).

La Figura 3 muestra la evolución de la profundidad adimensional h/h_0 , para los puntos en el perfil $y = 0$, para los casos 1-3 y 2. Se observa que después de 100 s aprox. la altura adimensional para el caso 1-3 se mantiene casi idéntica a 1, mostrando que, para esta condición de flujo, el modelo SurfWB-UC no fue capaz de generar un estado estacionario oscilatorio. Muy distinto es el caso 2, en que después de este mismo intervalo se genera una oscilación bien definida.

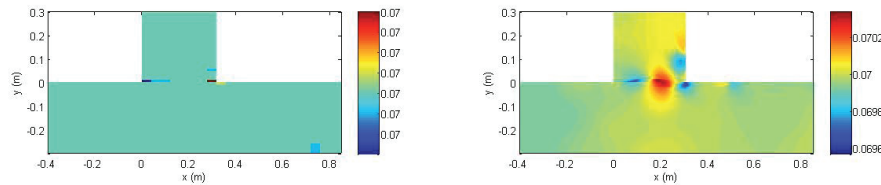


Figura 2. Comparación de la profundidad del agua luego de 7,2s en los casos 1-2 y 1-3, respectivamente.

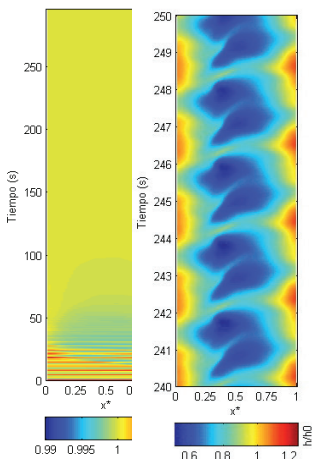


Figura 3. Evolución en el tiempo de la profundidad adimensional h/h_0 , del perfil $y = 0$ para los casos 1-3 y 2 respectivamente. Notación: $x^* = x/L_2$

Valores promedio sobre el intervalo (100 s, 300 s), para la velocidad y su magnitud adimensional (respecto de la velocidad inicial del flujo) se muestran en la Figura 4. Se observa que en ambos casos se logra un patrón de recirculación de eje vertical positivo, pero que, para el caso 1-3, la magnitud de la velocidad media es del orden de $10^{-2}u_0$ con un **número de Reynolds** respectivo de orden inferior a 100. Este valor sugiere un régimen laminar, causando que el efecto de la viscosidad molecular y roce con las paredes puedan alterar notablemente la distribución de velocidades, fenómeno que no es posible capturar con este modelo y que podría explicar la ausencia de oscilación estacionaria en este caso. Por otro lado, la distribución de la magnitud adimensional de la velocidad media para el caso 2 es de orden 1, lo que indica una mayor actividad en la cavidad y que se ve también reflejada en la oscilación estacionaria de la superficie libre. Estos resultados concuerdan con lo observado en la literatura [1], [4]. Además, debido a que en ambos casos las esquinas presentan la menor magnitud de velocidad media y mayor profundidad (ver Tabla 3), estas zonas son calificadas como de acumulación o estancamiento.

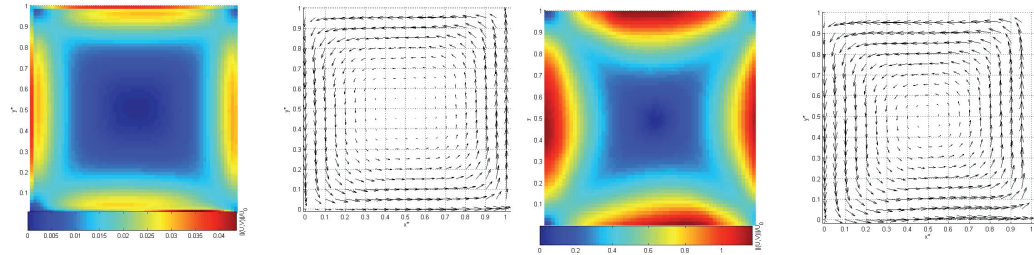


Figura 4. Velocidad media (magnitud adimensional y vectores) para los casos 1-3 y 2 respectivamente. Notación: $x^*=x/L2$, $y^*=y/W$.

La Figura 5 muestra la composición espectral de las series de tiempo estudiadas en nueve puntos de la cavidad, donde, comparando las frecuencias de los peak con las frecuencias naturales de resonancia para una cavidad semiabierto y cerrado (0,522Hz y 1,044Hz, [12]) se observa que son idénticos, y por lo tanto, se juzga que para este escurrimiento, los modos de oscilación fueron reproducidos con precisión por el modelo SurfWB-UC.

Tabla 3. Altura adimensional de la columna de agua al interior de la cavidad, para nueve puntos del Caso 2. $x^*=x/L2$, $y^*=y/W$

$y^* \backslash x^*$	0,0	0,5	1,0
0,0	1,7481	1,1553	1,6476
0,5	1,1474	1,0965	1,1516
1,0	1,8064	1,2557	1,7073

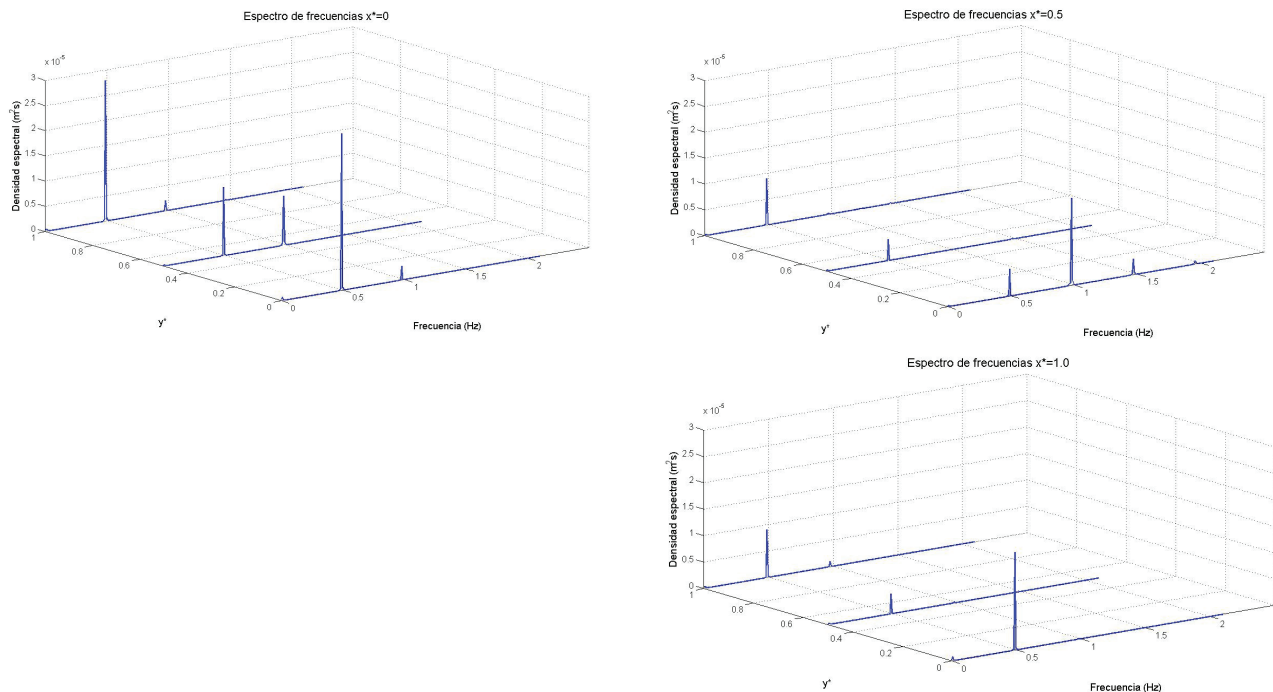


Figura 5. Composición espectral de las series de tiempo extraídas en nueve puntos. Notación: $x^* = x/L2$, $y^* = y/W$.

CONCLUSIONES

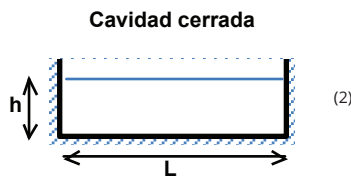
Se realizaron simulaciones bidimensionales de escurrimientos con cavidad lateral rectangular utilizando el modelo SurfWB-UC, con el propósito de investigar las principales características descritas en la literatura. Se examinó la influencia de la discretización, observando que la difusión numérica fue capaz de impedir la aparición de las estructuras que se esperaban al interior de la cavidad, lo cual se reparó satisfactoriamente con una malla más fina. Se observó que la condición inicial también tuvo influencia, ya que al no existir gradientes de presión entre la cavidad y el escurrimiento principal, las fuerzas de corte que generan el movimiento, como era de esperarse, no fueron capturadas por SurfWB-UC. Sin embargo, al imponer una diferencia del 1% en la altura de agua y para un escurrimiento principal con número de Froude de 0,8, SurfWB-UC fue capaz de reproducir los tres principales fenómenos descritos en la literatura: generación de vórtices en la interfaz canal-cavidad; patrón de recirculación de vorticidad vertical positiva; y oscilación de la superficie. Sobre esto último, se encontró una notable precisión en las frecuencias más importantes del espectro de las series de tiempo de la superficie libre, que coinciden con los modos normales de la cavidad. Lo anterior refleja que para este tipo de flujo en el canal principal, los gradientes de presión y advección de cantidad de movimiento por sí solos pueden tener un mayor protagonismo en la excitación del espacio a sus características principales, independiente de la condición inicial que se imponga al interior de la cavidad.

Por consiguiente, este estudio ha mostrado que, al incorporar una perturbación inicial de la superficie libre, el modelo SurfWB-UC es capaz de recrear estas complejas estructuras satisfactoriamente, sugiriendo un rango de aplicabilidad de interés. Sin embargo, la falta de términos de corte viscoso o turbulento en el modelo impide que este mecanismo se active en forma autónoma. Una siguiente etapa a este trabajo debe ser, por lo tanto, la incorporación de términos de mezcla turbulenta y viscosa y validar estos resultados para comprobar cuantitativamente su precisión.

PRINCIPIO CIENTÍFICO UTILIZADO

Es posible demostrar mediante el estudio de pequeñas perturbaciones en la superficie libre en reposo de una cavidad horizontal, que esta se comporta como un resonador frente a señales de frecuencias determinadas por la geometría y características del borde de la cavidad. Dos casos de particular interés son el de una cavidad cerrada y semiabierta con profundidad h constante (ver Figura 6), cuyas principales frecuencias de oscilación son respectivamente:

$$f_{\text{cerrada}} = \frac{\sqrt{gh}}{2L}$$



$$f_{\text{semi-abierta}} = \frac{\sqrt{gh}}{4L}$$

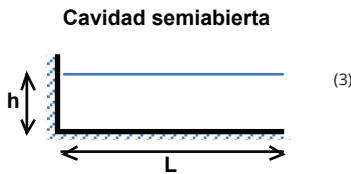


Figura 6. Características de una cavidad cerrada y semiabierta.

Luego, dada una serie de tiempo de la profundidad h del agua en un punto de la cavidad, la transformada discreta de Fourier (DFT), aplicada mediante la transformada rápida de Fourier (FFT) en MatLab® R2008a, permite conocer la distribución de energía de las frecuencias de las componentes sinusoidales de la señal original, para identificar aquellas que son principales. Esto permitió conocer las frecuencias que poseen la mayor parte de la energía total de la señal y compararlas con las frecuencias naturales de la cavidad dadas por las ecuaciones (2 y 3).

GLOSARIO

Meandro: Es una curva de un río cuya sinuosidad es muy pronunciada tal que, muchas veces, frente a crecidas importantes, es interrumpida y 'recortada', dejando como consecuencia una geometría similar a una cavidad.

Número de Froude (Fr): Número adimensional que representa la razón entre la inercia (velocidades) del flujo y su peso. Cuando es mayor a 1 se habla de régimen supercrítico, en el que el escurrimiento es suficientemente rápido como para no permitir la propagación de información (ondas) hacia aguas arriba. Cuando es menor a 1 es régimen subcrítico, en que el escurrimiento es lo suficientemente lento como para propagar información en ambas direcciones.

Ecuaciones de Navier Stokes: Ecuaciones que expresan la conservación de masa y cantidad de movimiento (equilibrio de fuerzas) para un fluido cualquiera.

Número de Reynolds (Re): Número adimensional que representa la razón entre la inercia (velocidades) del flujo y su viscosidad. En general, cuando es orden de 10^4 o mayor se habla de régimen turbulento, si es 10^2 o menor, régimen laminar, indicando que la viscosidad tiene mayor importancia. El rango de orden 10^3 se denomina transición.

Distribución hidrostática de presiones: Distribución de presiones que se observa en una masa de agua en reposo.

Caudal unitario: Caudal equivalente que escurriría por un canal rectangular de ancho unitario.

Viscosidad molecular: Resistencia que presenta un fluido frente a las deformaciones por corte. Análogo a la fricción entre dos sólidos, este fenómeno caracteriza, en fluidos como el agua, la cohesión molecular. Se mide mediante un coeficiente que relaciona las variaciones de velocidad con la resistencia que el fluido pone a estas. Uno de sus efectos es la mayor transferencia de cantidad de movimiento en todas direcciones que tiende a generar distribuciones más uniformes de velocidad.

Difusión numérica: Parte del error numérico que tiene una estructura definida tal que causa, en el resultado, un efecto similar al de la viscosidad molecular pero a una escala de tiempo, en general, mucho más rápida cuanto más gruesa sea la discretización del dominio de cálculo.

AGRADECIMIENTOS

El primer autor desea agradecer la colaboración y constructivas discusiones que tuvieron lugar con Karina Soto y el profesor Cristian Escarriaza, cuyos comentarios, además de ser una fuente de aprendizaje, contribuyeron indudablemente al curso que tomó esta investigación.

REFERENCIAS

1. Cienfuegos, R.; Barthélemy, E.; Bonneton, P. A fourth-order compact finite volume scheme for fully nonlinear and weakly dispersive Boussinesq-type equations. Part II: Boundary conditions and validation. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 53 (9):1423-1455, 2007.
2. Durrán, Dale R. *Numerical methods for wave equations in geophysical fluid dynamics*. Seattle: Springer, 1999.
3. Guerra París, Maricarmen. *Numerical and experimental modeling of extreme flood waves and inundation zones*. Santiago, Chile: Pontificia Universidad Católica de Chile, Escuela de Ingeniería, Departamento de Ingeniería Hidráulica y Ambiental, 2010.
4. Kadotani, K.; Fujita, I.; Matsubara, T.; Tsubaki, R. Analysis of water surface oscillation at open channel side cavity by image analysis and large eddy simulation. Nagoya, Japan: ICHE conference, 2008.
5. Kimura, I.; Hosoda, T. Fundamental properties of flows in open channels with dead zone. *Journal of Hydraulic Engineering* 123 (2): 98-107, 1997.
6. Marche, F.; Bonneton, P.; Fabric, P.; Seguin, N. Evaluation of well-balanced bore-capturing schemes for 2D wetting and drying processes, *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 53 (5): 713-894, 2007.
7. Mizumura, K.; Yamasaka, M. Flow in open channel embayments. *Journal of Hydraulic Engineering* 128 (12): 1098-1101, 2002.
8. Riviere, N; García, M; Mignot, E; Travin, G. Characteristics of the recirculation pattern in a lateral cavity. *International Conference on Fluvial Hydraulics (River Flow 2010)*.
9. Sanders, B. F. Non-reflecting boundary flux function for finite volume shallow-water models. *Advances in Water Resources* 25 (2): 195-202, 2002.
10. Toro, Eleuterio. *Shock capturing methods for free surface shallow flows*. s.l.: John Wiley, 2010.
11. Wolfinger, M; Ozen, C. A.; Rockwell, D. Shallow flow past a cavity: coupling with a standing gravity wave. *Physics of fluids* 24, 104103: 1-16, 2012.

EQUIPO DE INVESTIGADORES

- 1 José Galaz
- 2 Maricarmen Guerra
- 3 Profesor Rodrigo Cienfuegos

