

# Método de elementos finitos disperso para ecuaciones diferenciales con fuente estocástica

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE  
ESCUELA DE INGENIERÍA

**Camilo Aburto**<sup>1</sup>, Alumno de quinto año

**Carlos Jerez**<sup>2</sup>, Profesor Asistente

<sup>1</sup>INGENIERÍA INDUSTRIAL MATEMÁTICA

<sup>2</sup>DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

## INTRODUCCIÓN

Se analiza la solución por **elementos finitos** de la ecuación  $Au = f$ , donde  $A$  es un operador lineal y acotado,  $f$  es una fuente estocástica y  $u$  es el campo aleatorio solución del problema. El enfoque más simple para abordar esta ecuación está dado por una **simulación Monte Carlo** (MC), en la que se genera un gran número  $M$  de muestras  $f_j$  del campo aleatorio, a partir de las cuales se resuelve la ecuación, obteniendo una muestra de la solución  $\{u_j = A^{-1}f_j, j=1, \dots, M\}$ . Los momentos estadísticos de la solución  $u$  son aproximados por los momentos estadísticos del conjunto  $\{u_j\}$ . En general, este método asegura una convergencia de orden  $O(M^{-1/2})$  para el primer momento y peores tasas para momentos superiores, como por ejemplo, la covarianza.

El enfoque de este trabajo, introducido en [1] para el operador laplaciano, es utilizar la linealidad de la ecuación  $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{f}$ , para obtener una ecuación diferencial parcial determinista para el ***k*-ésimo momento** de la solución. Se ha mostrado en [2], [3] que el resultado de la ecuación determinista para momentos de orden mayor puede ser aproximado por elementos finitos con complejidad comparable al problema del primer momento, mediante productos tensoriales no-densos, cuando es posible construir una base jerárquica. Desde este enfoque, se contemplan dos formulaciones para el **método de Galerkin** que difieren en el espacio de prueba utilizado.

Se aplicará esta metodología a la solución numérica del **problema de Dirichlet** para la ecuación de Laplace con una fuente estocástica. Para ello, se introducirá una base jerárquica de wavelets, a partir de la cual se considerará el producto tensorial no-denso de los espacios de prueba, para obtener la formulación de Galerkin.

## METODOLOGÍA

La resolución de la Ecuación (1)<sup>1</sup> se realizó mediante tres metodologías basadas en la formulación de Galerkin para elementos finitos. En primer lugar, se hizo uso del método **Galerkin-Monte Carlo** (GMC), presentándose la cota de convergencia encontrada en [4]. Esta cota de convergencia y la aproximación computable por métodos numéricos utilizada en este trabajo pueden verse en detalle en las Ecuaciones (2) y (3), respectivamente.

En seguida, se resuelve (1) mediante el método de **Galerkin Determinista** (GD). Para ello, se tuvo en cuenta la versión tensorial de la Ecuación (1), para la posterior aplicación del operador esperanza. La linealidad de los operadores permitió obtener la ecuación (4), que debe resolverse sobre el espacio funcional del producto tensorial. En particular, se empleó este método para abordar la resolución de los casos particulares asociados al primer y segundo momento de la solución, esto es, considerar  $k = 1, 2$  en la Ecuación (1), para obtener las Ecuaciones (5) y (6). Este procedimiento es aplicado en dos versiones para la resolución de (6), a saber, con su formulación tensorial completa y una formulación tensorial no densa.

La solución al problema planteado en (1) se encuentra en el **Espacio de Sobolev**  $H_0^1(D)$ , donde  $D$  corresponde al dominio de la solución. Al plantear un subespacio de dimensión  $N$  finita dado por,  $V_N^D \subset H_0^1(D)$  adopta su base estándar dada por las funciones triangulares o sombrero. Dado que la ecuación (6) corresponde a la versión tensorial de (1), debe buscarse una solución en el espacio producto de  $H_0^1(D) \otimes H_0^1(D)$ . La aplicación del método de Elementos Finitos requiere la construcción de un subespacio de dimensión finita. La formulación tensorial completa consiste en considerar el subespacio  $V_N^D \otimes V_N^D$ , cuya dimensión es  $N^2$ . De esta forma, la formulación tensorial completa de Galerkin consiste en encontrar:

$$\mathbf{u} \in V_N^D \otimes V_N^D: \mathbf{b}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{l}(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V_N^D \otimes V_N^D,$$

donde  $\mathbf{b}(\cdot, \cdot)$  y  $\mathbf{l}(\cdot)$  están dados por las Ecuaciones (9) y (10). Por otro lado, la formulación tensorial no-densa consiste en la implementación de una base sparse o no-densa. Considerando una familia de espacios vectoriales  $V_l^D$  y  $W_l^D$  tales que

$$V_0^D \subset \dots \subset V_l^D \subset \dots \subset H_0^1(D) \quad \text{y} \quad V_l^D = V_{l-1}^D \oplus W_l^D, \quad l = 1, 2, \dots$$

puede definirse el espacio tensorial no-denso  $V_N^D \tilde{\otimes} V_N^D$  como se muestra en (11). Este espacio tiene dimensión  $N \log(N)$  y la formulación tensorial no densa de Galerkin requiere encontrar:

$$\mathbf{u} \in V_N^D \tilde{\otimes} V_N^D: \mathbf{b}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{l}(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V_N^D \tilde{\otimes} V_N^D$$

En particular, se determina una base para el espacio  $V_N^D$  dada por *wavelets* lineales por tramos, a partir de la cual se construye una base del espacio producto de funciones de prueba (véase [6]).

Una vez introducida la teoría asociada a los tres enfoques de resolución del problema, se programó un algoritmo en MATLAB para el cómputo de los dos primeros momentos de la solución, a través de un procesador Intel Core i3. Se consideraron como *input* del algoritmo, el número de iteraciones de la simulación MC, el número de grados de libertad del problema y los datos asociados a la fuente estocástica.

## RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Se estudiaron las soluciones numéricas obtenidas y las tasas de convergencia de las tres metodologías utilizadas. La resolución del problema se realizó en un dominio  $D = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ , y para un campo aleatorio

<sup>1</sup> Ecuaciones presentadas en el cuadro de principio científico

de distribución conocida, dada por las ecuaciones (7) y (8). Las soluciones se presentan para 10.000 realizaciones de la simulación MC y 100 grados de libertad.

La Figura 1 muestra la comparación entre la solución por el método GMC y la solución analítica de (5), esto es, para el primer momento estadístico de la solución. En forma análoga, la Figura 2 muestra resultados bajo la misma configuración para la Ecuación (6), que alude al segundo momento estadístico de la solución. Puede verse que existe un error considerable en ambos casos, debido a que el método de Monte Carlo presenta una convergencia relativamente lenta. En particular, la convergencia del error puede apreciarse en la Figura 3, en que se compara la tasa de convergencia obtenida para el método GMC con su tasa de convergencia teórica, obtenida a partir de [4]. La cota de convergencia presentada en (3) es alcanzada. Puede notarse que para mejorar en un orden de magnitud el error, es necesario aumentar en dos órdenes de magnitud el número de grados de libertad, y que aún para 10.000 grados de libertad el error es considerable.

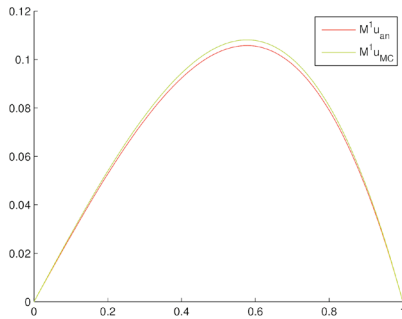


Figura 1. Aproximación de  $Mu$  por método Galerkin- monte Carlo con  $f(x,\omega)=x \exp(\epsilon(\omega))$ .

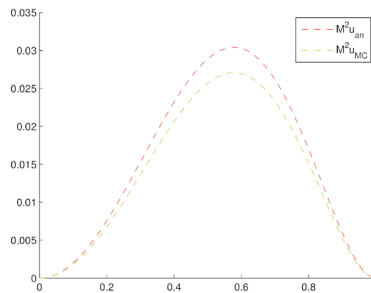


Figura 2. Aproximación de  $M^2u$  por método Galerkin- monte Carlo con  $f(x,\omega)=x \exp(\epsilon(\omega))$ .

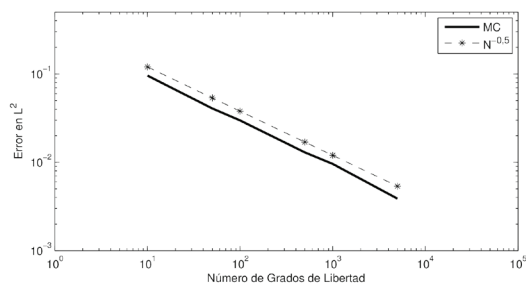


Figura 3. Error en  $L^2$  de la aproximación por el método Galerkin-Monte Carlo.

Los siguientes resultados aluden al método GD. Las Figuras 4 y 5 muestran los resultados para este método, en comparación con la solución analítica de (5) y (6), respectivamente. Además, se muestra la solución obtenida por el método GMC, dando cuenta de la superioridad de su análogo GD. En ambos casos puede verse que la conclusión obtenida por el método GD calza con la resolución analítica, apreciándose que el error de aproximación es sustancialmente menor al obtenido con el procedimiento anterior. La Figura 6 muestra una comparación de los órdenes de convergencia de ambos caminos para la aproximación de la solución de (5). El método GD presenta un error de aproximación sustancialmente más pequeño que el método GMC, siendo del orden de  $10^{-7}$  para 1.000 grados de libertad. Además, puede verse que la tasa de convergencia del método GD es  $O(N^{-2})$ , presentando una mejoría considerable por sobre el GMC.

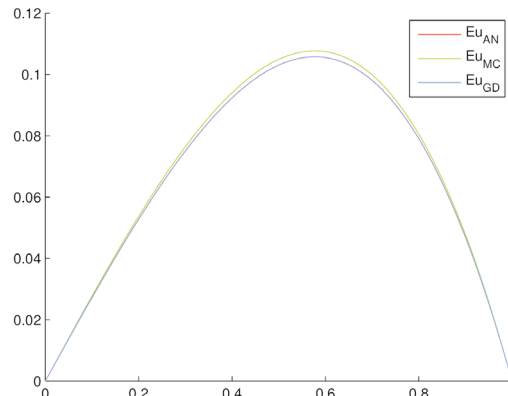


Figura 4. Resultado para  $Mu$  para el método determinista de Galerkin con  $f(x,\omega)=x \exp(\epsilon(\omega))$ .

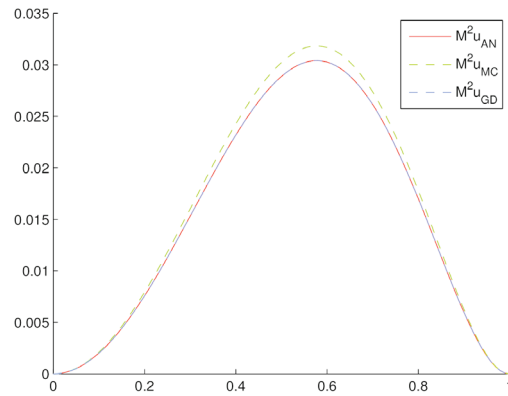


Figura 5. Resultado para  $M^2 u$  para el método determinista de Galerkin con  $f(x,\omega)=x \exp(\epsilon(\omega))$ .

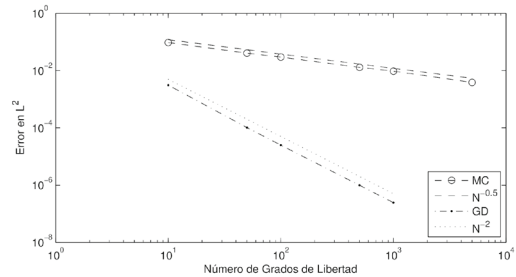


Figura 6. Error en  $L^2$  de la aproximación del método determinista de Galerkin para  $Mu$ .

Finalmente, se comparan las dos versiones del método GD, dadas por las formulaciones tensorial completa y tensorial no-densa. La Figura 7 describe los órdenes de convergencia del error de aproximación de la Ecuación (6) para ambos métodos. El método con aproximación por una base tensorial no-densa presenta una mayor tasa de convergencia, tendiendo a  $\mathcal{O}(N^{-1.5})$ , mientras que el procedimiento clásico de base tensorial completa presenta una tasa de convergencia  $\mathcal{O}(N^{-1})$ . Esto demuestra gráficamente la ventaja comparativa entre estas dos modalidades.

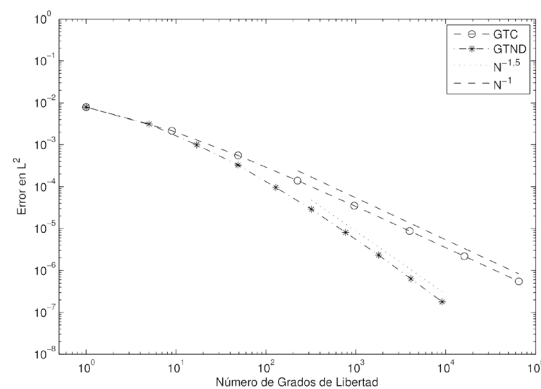


Figura 7. Error en  $L^2$  de la aproximación de  $M^2 u$  usando aproximación tensorial no-densa (GTND) y el método clásico con tensorización completa (GTC).

## CONCLUSIONES

En el presente trabajo se abordó la resolución numérica de los momentos  $k$ -ésimos de la solución  $u$  asociada a la ecuación  $\mathbf{A}u = \mathbf{f}$ , donde  $\mathbf{A}$  es un operador elíptico y  $\mathbf{f}$  es una fuente estocástica. Se plantearon tres metodologías de Galerkin para la resolución del problema de Dirichlet asociado a esta ecuación mediante elementos finitos, y se comparó su desempeño en el caso  $\mathbf{a} = 1$  para un campo aleatorio de distribución conocida a través de experimentos numéricos.

Se introdujo el método de aproximación no-densa a través de los *sparse tensor products* o productos tensoriales no-densos o dispersos para la computación de momentos de orden mayor a  $u$ , que resultan de resolver (4). Este procedimiento permite obtener un nivel de complejidad  $\mathcal{O}(N_L(\log N_L)^{k-1})$ , donde  $N_L$  es la dimensión de una base jerárquica adecuada. Esta complejidad es inferior a la del método tensorial de Galerkin para elementos finitos usual, que corresponde a  $N^2$ . Se presentó una base jerárquica de *wavelets* lineales por tramos, con el fin de implementar el método de productos tensoriales no-densos sobre el problema del segundo momento.

Se encontró que la formulación tensorial no-densa de Galerkin presenta una mejora considerable respecto de la formulación tensorial completa en la resolución de la Ecuación (6), presentando un orden de convergencia que se estabiliza cercano a  $\mathcal{O}(N^{-1.5})$ , mientras que el algoritmo usual de base tensorial completa presenta una tasa de convergencia de  $\mathcal{O}(N^{-1})$ . La evidencia encontrada, junto a la teoría presentada [4], indica que el comportamiento lineal logarítmico de la complejidad del problema debiese generar mejoras aún más impactantes en la convergencia de la solución numérica para el problema de momentos superiores, es decir,  $k > 2$  en la Ecuación (4).

## PRINCIPIO CIENTÍFICO UTILIZADO

Muchos fenómenos naturales y sociales pueden ser modelados por ecuaciones diferenciales parciales, con fuentes o parámetros estocásticos. Como la resolución analítica de dichos problemas es imposible, el uso de algoritmos numéricos implementados en computadores es una obligación. El método de Montecarlo converge muy lentamente comparado con la formulación determinista en elementos finitos, sin embargo, la formulación directa de este último requiere de un número de variables exponencialmente creciente. El GD disperso permite describir soluciones en espacios productos tensoriales, por medio de la generación de bases definidas en todo el espacio producto, ahorrando una inmensa cantidad de grados de libertad para la misma precisión demandada.

Ecuaciones:

$$\mathbf{A}u = \mathbf{f} \quad (1)$$

$$\|E_{\mathcal{M}^k}^M u - \mathcal{M}^k u\|_{L^\alpha} \leq CM^{-(1-\frac{1}{\alpha})} \|u\|_{L^\alpha} \quad (2)$$

$$\|E_{\mathcal{M}^k}^M u - \mathcal{M}^k u\|_{L^\alpha}^2 \leq \frac{1}{N_{MC}} \sum_{j \in N_{MC}} \|E_{\mathcal{M}^k}^M u_j\|_{(H^1(D))^N}^2 \quad (3)$$

$$A^{(k)} \mathcal{M}^k u = \mathcal{M}^k f \quad (4)$$

$$AEu = Ef \quad (5)$$

$$A \otimes A E(u(x)u(y)) = E(f(x)f(y)) \quad (6)$$

$$f(x, \omega) = x e^{\varepsilon(\omega)} \quad (7)$$

$$\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad (8)$$

$$b(u, v) = \int_{D \otimes D} \nabla u \nabla v dx \quad (8)$$

$$l(v) = \int_{D \otimes D} f v dx \quad (10)$$

$$V_N^D \widehat{\otimes} V_N^D = \bigotimes_{1 \leq l_1 + l_2 \leq N} W_{l_1}^D \otimes W_{l_2}^D \quad (11)$$

## GLOSARIO

- 1. Método de elementos finitos:** Es un método numérico resultante de la discretización por medio de bases locales soportadas de la formulación variacional de un sistema de ecuaciones diferenciales parciales.
- 2. Simulación Monte Carlo:** Método no determinístico usado para aproximar expresiones matemáticas complejas, posibilitando la realización de experimentos con muestreos de números pseudoaleatorios en la computadora.
- 3. Método de Galerkin:** Método para convertir un problema asociado a un operador continuo, en un problema discreto.
- 4. Problema de Dirichlet:** Hallar una función, que sea la solución de una ecuación diferencial parcial, determinada en el interior de un dominio, que tome valores prescritos en el contorno de dicho dominio.
- 5. Espacio de Sóbolev:** Es un tipo de espacio vectorial funcional tal que la función y sus derivadas hasta cierto orden tienen norma tipo  $L_p$  finita.
- 6. Momento  $k$ -ésimo:** Momento estadístico de orden  $k$  de una variable aleatoria  $u$ . Se denota por  $M^k u$ . En caso  $k$  igual a uno, tenemos la esperanza.
- 7. Producto tensorial  $V \otimes V$ :** es el espacio producto cartesiano  $V \times V$  cocientado por cuatro relaciones de equivalencia.
- 8. MC:** Monte Carlo.
- 9. GD:** Galerkin Determinista.
- 10. GMC:** Galerkin-Monte Carlo.

## AGRADECIMIENTOS

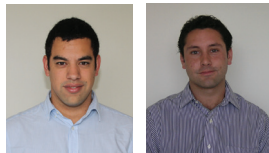
Se agradece a mis compañeros Felipe Pinochet y José Pinto por el apoyo técnico y moral durante el desarrollo de este trabajo.

## REFERENCIAS

1. Babuska, I. On randomized solution of Laplace's equation. Časopis pro Pěstování Matematiky 86: 269-276, 1961.
2. Bieri, M. Sparse tensor discretizations of elliptic PDEs with random input data. PhD thesis. Diss. ETH No. 18598.
3. Cohen, A, DeVore, R, Schwab, C. Convergence rates of best  $N$ -term stochastic Galerkin FE-approximations for a class of elliptics sPDEs. Tech. Rep. 2009-02, Seminar for Applied Mathematics, ETH Zürich, 2009.
4. Hughes, T.J.R., The finite element method - linear static and dynamic finite element analysis, Dover Publications, 2000.
5. Nguyen, H. Finite element wavelets for solving partial differential equations, PhD thesis, Universiteit Utrecht, 2005.
6. Schwab, C., Todor, R.A. Sparse finite elements for elliptic problems with stochastic loading. Numerische Mathematik 95: 707-734, 2003.
7. Schwab, C., Todor, R.A. Sparse finite elements for stochastic elliptic problems-higher order moments. Computing 71: 43-63, 2003.
8. Von Petersdorff T., Schwab C., Sparse finite element methods for operator equations with stochastic data. Applications of Mathematics, 51(2):145-180, 2006.

## EQUIPO DE INVESTIGADORES

- 1 Camilo Aburto
- 2 Profesor Carlos Jerez



1

2