

Imagen: ESO. Disponible en https://www.eso.org/public/images/arsenault_fig5b/

Algoritmo rápido para modelar la interacción entre un espejo deformable y un sensor de frente de onda

Fast algorithm to model the interaction of a large deformable mirror with a wavefront sensor

Felipe Riquelme Espinoza¹, alumno de 6° año.
Clémentine Béchet², profesora asistente adjunta.

¹Departamento de Ingeniería Eléctrica, Escuela de Ingeniería, Pontificia Universidad Católica de Chile.

²Instituto de Ingeniería Matemática y Computacional, Escuela de Ingeniería, Pontificia Universidad Católica de Chile.

*Autor para correspondencia: cbechetp@ing.puc.cl

Felipe Riquelme Espinoza¹, 6th year student.
Clémentine Béchet², assistant associate professor.

¹Department of Electrical Engineering, School of Engineering, Pontificia Universidad Católica de Chile.

²Institute for Mathematical and Computational Engineering, School of Engineering, Pontificia Universidad Católica de Chile.

*Corresponding autor: cbechetp@ing.puc.cl

RESUMEN

La distribución circular de los actuadores en espejos deformables (ED) grandes, utilizada en la mayoría de los sistemas de óptica adaptativa de los grandes telescopios astronómicos, conlleva una serie de dificultades computacionales, junto con nuevos problemas de modelamiento. Aquí, nosotros estudiamos cómo obtener algoritmos rápidos para modelar y simular eficientemente las distorsiones en los espejos y su interacción con los sensores de frentes de onda. Esta propuesta se basa en el modelamiento matemático de las distorsiones del espejo a través de sus funciones de influencia y el modelamiento de un sensor, del tipo Shack-Hartmann, mediante gradientes promedio. En este trabajo preliminar, logramos establecer el formalismo para describir las distorsiones de ED como una función de las posiciones y funciones de influencia de los actuadores. Estudiamos diversos modelos de funciones de influencia sopesando entre la carga computacional y la exactitud asociada. Esto fue realizado para ambas distribuciones de actuadores, cuadradas (clásica) y circulares (más recientes). Adicionalmente, implementamos un modelo para el sensor de frente de ondas, ya que los estudios futuros se enfocarán en el establecimiento de un formalismo matemático y una implementación rápida de la interacción global del sensor y el espejo. Estos modelos fueron implementados en Matlab.

Palabras clave: óptica adaptativa, espejos deformables, sensores de frente de onda, modelamiento, implementación, algoritmo.

ABSTRACT

The circular distribution of actuators in the large deformable mirrors (DMs) used for most of the new adaptive optics systems on the large telescopes for astronomy lead to computational difficulties as well as new modeling issues. We study how to obtain fast algorithms to efficiently model and simulate the mirror distortions and its interaction with a wavefront sensor. The work relies on the mathematical modeling of the mirror distortions through their influence functions, and modeling of a Shack-Hartmann sensor via averaged gradients. In this preliminary work, we establish the formalism to describe the DM distortions as a function of the actuators positions and of their influence function. We study various models of influence functions as a result of a trade-off between computational load and model accuracy. This is done for both square (classical) and circular (more recent) arrays of actuators. We also have implemented a model of wavefront sensor, because further study will focus on establishing a formalism and a fast implementation of the global interaction of the mirror with the sensor. The models are tested implementing a code in matlab.

Key words: adaptive optics, deformable mirror, wavefront sensor, modeling, implementation, algorithm.

1. INTRODUCCIÓN

Chile ofrece observatorios de clase mundial para los astrofísicos. Para permitir observaciones de gran **RESOLUCIÓN ANGULAR**, los espejos deformables son equipados con sistemas de óptica adaptativa (OA) (Roddier, 1999). La investigación y el desarrollo para estos sistemas de OA es crucial para la mejora continua de las observaciones astronómicas y para permitir nuevos descubrimientos. La OA debe lidiar con mediciones de fase óptica en tiempo real para reducir la distorsión de los frentes de onda, provenientes de las estrellas, al manipular los actuadores en un **ESPEJO DEFORMABLE (ED)** grande.

La distribución circular de los actuadores en un ED grande, usado en la mayoría de los nuevos sistemas de OA de los grandes telescopios, conlleva dificultades computacionales y nuevos desafíos de modelamiento (Madec, 2012). Nuevos algoritmos rápidos y eficientes para simular las distorsiones en los espejos y su interacción con el frente de onda son necesarios. La idea de esta investigación proviene del uso

1. INTRODUCTION

Chile offers world-class optical observatories for astrophysicists. In order to allow high **ANGULAR RESOLUTION** observations, deformable mirrors are equipped with adaptive optics (AO) systems (Roddier, 1999). Research and development for these AO facilities is crucial to continuously improve the astronomical observations and to allow new discoveries. AO have to deal with real-time measurements of optical phase, to reduce the distortion of the wavefront coming from stars manipulating the actuators of a large **DEFORMABLE MIRROR (DM)**.

The circular distribution of actuators in the large DMs used for most of the new AO systems on the large telescopes lead to computational difficulties as well as new modeling issues (Madec, 2012). We need fast algorithms to efficiently model and simulate the mirror distortions and its interaction with a wavefront sensor. The idea of this research work comes from the use of a fast AO simulator, able to simulate squarely-distributed actuators, but not the new circularly-

de un simulador rápido de OA capaz de emular actuadores distribuidos de manera cuadrada, pero incompatible con arreglos circulares. El trabajo presentado descansa sobre el modelamiento matemático de distorsión de los espejos a través de sus **FUNCIONES DE INFLUENCIA** (FI). Este trabajo busca la implementación numérica más eficiente, en relación al tiempo y/o consumo de memoria, para computar las interacciones de un espejo con un **SENSOR DE FRENTE DE ONDA TIPO SHACK-HARTMANN** (WFS, del inglés Shack-Hartmann Wavefront Sensor) .

2. METODOLOGÍA

El ED es simulado como una superficie distorsionada por las funciones de influencia de sus actuadores. Inicialmente describimos la geometría de distribución de los actuadores sobre el espejo deformable o área de superficie. Esto puede ser a través de una grilla cuadrada o una distribución circular. Luego, describimos la representación 3D de la superficie del espejo discretizada sobre una matriz cuadrada. La distorsión producida por un actuador sobre la superficie del espejo es modelada por la denominada función de influencia (Menikoff, 1991; Arnold, 1997). Usamos dos aproximaciones para las funciones de influencia, la línea polinómica suave básica (del inglés, B-spline) (Rigaut, Ellerbroek & Northcott, 1997) y la FI polinómica (Oberti et al, 2016). Establecimos el formalismo asociado para cada modelo de IF, luego los implementamos en código de Matlab para testarlos. Luego, el sensor de frente de onda fue modelado e implementado en Matlab para análisis preliminar.

2.1. Geometría de actuadores

La mayoría de los ED usados actualmente en astronomía tienen sus actuadores distribuidos en una matriz cuadrada regular de tamaño $p \times p$. En este caso, denominamos Δ a la distancia de espaciado entre los actuadores, en donde existen $n_c = p^2$ actuadores en total. Por lo tanto, las coordenadas para el actuador i -ésimo pueden ser descritas como

$$(x_i, y_i) = (k\Delta, l\Delta) \text{ with } (k, l) \in [0, p-1] \times [0, p-1]$$

La nueva generación de ED con diámetros mayores a 1 metro usualmente tienen una distribución circular de actuadores a lo largo de su superficie. Por ejemplo, el nuevo espejo adaptativo secundario del VLT (del inglés, Very Large Telescope) de la ESO (European Southern Observatory) en Chile, tiene una distribución circular de actuadores (Oberti et al, 2016) representadas en la **Figura 1**.

En este caso, no hay una forma general de describir la geometría de los actuadores con una distancia de espaciado Δ uniforme. Las coordenadas cartesianas para cada

distributed ones. The presented work relies on the mathematical modeling of the mirror distortions through their **INFLUENCE FUNCTIONS**. This work is intended to further study the most efficient numerical implementation with respect to time and/or memory consumption when computing the interaction of the mirror with a **SHACK-HARTMANN WAVEFRONT SENSOR** (WFS).

2. METHODOLOGY

The DM is simulated as a surface distorted by the influence functions of its actuators. We first describe the geometry of distribution of the actuators over the deformable mirror or facesheet area. It can be either a square grid or a circular distribution. We next describe the 3D representation of the mirror surface, discretized over a square grid. The distortion produced by an actuator on the mirror surface is modeled by a so-called influence function (Menikoff, 1991, Arnold, 1997) . We use two approximations of influence functions (IFs), the B-spline IF (Rigaut, Ellerbroek & Northcott, 1997) and the polynomial IF (Oberti et al, 2016). We establish the formalism associated to each model of IF, and then we implement them in a Matlab code in order to test them. Next, the wavefront sensor is modeled and also implemented in Matlab for preliminary test.

2.1. Actuators geometry

Most of the deformable mirrors used in astronomy today have their actuators distributed over a regular square grid of size $p \times p$. In such case, we note Δ the actuator spacing step size and there are $n_c = p^2$ actuators in total. The coordinates of the i -th actuator can thus be described as

The new generation of large deformable mirrors with a diameter greater than 1 meter usually have a circular distribution of actuators over the mirror surface. For instance, the new adaptive secondary mirror of the Very Large Telescope (VLT) of the European Southern Observatory (ESO) in Chile has a circular distribution of actuators (Oberti et al, 2016) as represented in **Figure 1**.

In such case, there is no general way to describe the actuators geometry with a regular step size Δ . The cartesian coordinates of each actuator must be recorded and stored

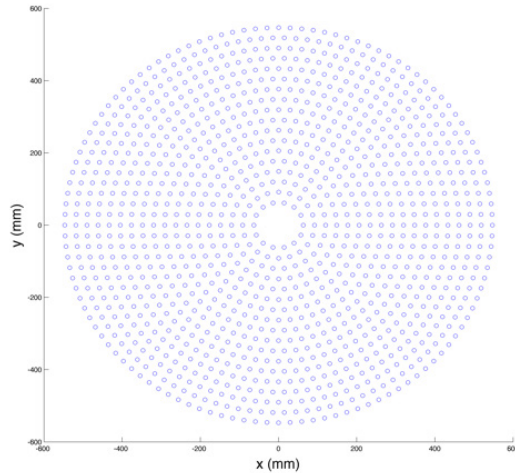


Figura 1. Posiciones de los 1.170 actuadores del gran espejo deformable secundario del VLT.

Figure 1. Positions of the 1,170 actuators of the large secondary deformable mirror of the VLT.

actuador deben ser registradas y guardadas en una lista $\{(x_i, y_i)\}_{1 \leq i \leq n_c}$ para cada i desde 1 hasta n_c .

2.2. Función de superficie del espejo

La función de superficie del espejo es representada en 3D como una función $f(x, y)$ donde x y y son coordenadas cartesianas discretizadas sobre una matriz cuadrada de $(2n + 1) \times (2n + 1)$ muestras. Cuando ningún actuador se encuentra activo, la función tiene valor 0 a lo largo de la matriz, lo que produce una superficie de espejo plana. Las distorsiones producidas por los actuadores controlados introducirá distorsiones en la superficie del espejo, en el orden de micrómetros, descritas por los valores de f .

En el caso de la mayoría de los espejos con tecnología deformable actualmente en uso, es razonable considerar que la distorsión del espejo f resulta de la suma de las distorsiones introducidas por cada actuador. A su vez, la distorsión introducida por cada actuador es proporcional al voltaje aplicado a éste, y la deformación 3D producida por unidad de voltaje en el actuador i -ésimo es descrita como $h_i(x, y)$. Por lo tanto, la deformación total corresponde a:

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{n_c} a_i h_i(x, y) \quad (1)$$

2.3. Funciones de influencia de actuadores

Cada actuador introduce el mismo tipo de deformación, caracterizado por la IF unidimensional normalizada de los actuadores, \bar{h} . Se asume que la distorsión inducida por los actuadores es separable en x y y , y centrada en la posición del actuador (x_i, y_i) , de manera que:

$$h_i(x, y) = \bar{h}(x - x_i) \bar{h}(y - y_i) \quad \forall i \in \llbracket 1, n_c \rrbracket \quad (2)$$

in a list $\{(x_i, y_i)\}_{1 \leq i \leq n_c}$ for all i from 1 to n_c .

2.2. Mirror surface function

The mirror surface is represented in 3D as a function $f(x, y)$ where x and y are cartesian coordinates discretized over a regular square grid of $(2n + 1) \times (2n + 1)$ samples. When no actuator is activated, the function has zero value everywhere, leading to a plane mirror surface. The distortions produced by the controlled actuators will introduce the mirror surface distortions, of the order of a micrometer, characterized by the values of f .

In most of the deformable mirrors technology used so far, it is reasonable to consider that the mirror distortion f is obtained as a sum of the distortions introduced by each actuator. The distortion introduced by one actuator is proportional to the voltage applied to the actuator, and the 3D deformation produced by a unit voltage on the i -th actuator is noted $h_i(x, y)$. So the total deformation is

2.3. Actuators influence functions

Each actuator introduces the same kind of deformation, characterized by the normalized one-dimensional influence function (IF) of the actuators, \bar{h} . The actuator-induced distortion is assumed to be separable in x and y , and centered on the actuator position (x_i, y_i) , such that

En esta investigación se usaron dos modelos de h : un modelo bilineal (*B-spline*) y otro polinómico. El modelo bilineal B-spline es definido en Rigaut, Ellerbroek & Northcott (1997) como:

$$\bar{h}(u) = \left(1 - \frac{|u|}{\Delta}\right) \text{ si } |u| \leq \Delta \quad (3)$$

0 en cualquier otro caso

0 otherwise

El modelo polinómico se define como:

The polynomial model is defined as

$$\begin{aligned} \bar{h}(u) = & 1 + (4c - 2.5)\left(\frac{|u|}{\Delta}\right)^2 + (1.5 - 3c)\left(\frac{|u|}{\Delta}\right)^3 \text{ if } |u| \leq \Delta \\ & (2c - 0.5)\left(2 - \frac{|u|}{\Delta}\right)^2 + (0.5 - c)\left(2 - \frac{|u|}{\Delta}\right)^3 \text{ if } \Delta \leq |u| \leq 2\Delta \end{aligned} \quad (4)$$

0 en cualquier otro caso

0 otherwise

Donde c es el factor de acoplamiento que varía entre 0 y 1 y $|u|$ es la distancia hasta la posición del actuador proyectada en el eje en consideración. Valores comunes para este coeficiente oscilan entre 0,1 y 0,4.

Where c is the coupling factor that varies between 0 and 1 and $|u|$ is the distance to the actuator position projected on the considered axis. Common values of this coefficient are between 0.1 and 0.4.

2.4. Modelo del sensor de frente de ondas

El objetivo final de este trabajo es obtener una implementación rápida de la interacción entre los voltajes aplicados al ED y los datos provenientes del sensor de frente de ondas del sistema de OA. Para esto, es necesario introducir el modelo del proceso de detección del frente de ondas. Para esto, el sistema Shack-Hartmann es comúnmente utilizado, el cual produce gradientes locales que pueden ser descritos mediante las siguientes ecuaciones:

2.4. Wavefront sensor model

The final aim is to obtain a fast implementation of the interaction between voltages applied to the DM and the data coming from the wavefront sensor of an AO system. For this, we need to introduce a model of the wavefront sensing process. The commonly used Shack-Hartmann device produces local gradients that can be described by the following equations

$$s_x^j = \frac{1}{l^2} \int_{x_j-l/2}^{x_j+l/2} \int_{y_j-l/2}^{y_j+l/2} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \quad (4)$$

$$s_y^j = \frac{1}{l^2} \int_{x_j-l/2}^{x_j+l/2} \int_{y_j-l/2}^{y_j+l/2} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

Donde s_x^j y s_y^j son componentes del gradiente en las direcciones x e y , respectivamente, para los datos en la j -ésima subapertura, l es el tamaño lineal de la subapertura y f es la función de superficie del espejo. Las coordenadas del centro de la j -ésima subapertura están definidas como (x_j, y_j) . Dado que utilizamos una representación discretizada de f , usaremos una aproximación de las integrales basada en el método de los trapecoides.

Where s_x^j and s_y^j are the gradient components in x and y directions respectively for the data in the j -th subaperture, l is the linear size of the subaperture and f is the mirror surface function. The coordinates of the center of the j -th subaperture are (x_j, y_j) . Since we have a discretized representation of f , we will use an approximation of the integrals based on the method of the trapezoids.

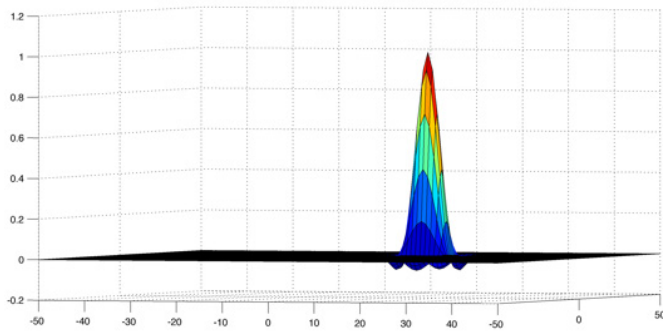


Figura 2. Ejemplo de la distorsión inducida por un actuador modelado por una función de influencia polinómica con factor de acoplamiento nulo ($c=0$).

Figure 2. Example of distortion induced by an actuator modeled with a polynomial influence function with null coupling ($c=0$).

3. RESULTADOS

El modelo presentado anteriormente fue implementado en código de Matlab para poder testarlo. Las simulaciones fueron realizadas en una matriz de 12×12 actuadores y en una geometría circular con 1.170 actuadores, correspondiendo al caso del ED secundario del VLT representado en la **Figura 1**. En la **Figura 2** se ilustra un modelo polinómico de la función de influencia con un factor de acoplamiento $c = 0$.

La forma obtenida con $c = 0$ es consistente con la distorsión reportada por ESO para su gran espejo secundario (Roddiier, 1999), confirmando el interés en el estudio de modelos polinómicos de FIs (Oberti et al, 2016).

A continuación, la **Figura 3** muestra los resultados para la simulación de una compensación por inclinación (forma de un espejo plano inclinado) por el ED con geometría circular de ESO.

Finalmente, también testeamos satisfactoriamente la implementación de un modelo de sensor de frente de ondas usando la función “trapz” incluida en Matlab, con el fin de

3. RESULTS

The models presented above have been implemented in a Matlab code for testing purposes. Simulations have been tested on a square grid of 12×12 actuators as well as for a circular geometry with 1.170 actuators corresponding to the case of the secondary deformable mirror used by the VLT and shown in **Figure 1**. We show in **Figure 2** an illustration of a polynomial model of influence function with a coupling factor $c = 0$.

The obtained shape with $c = 0$ is consistent with the distortion reported by ESO for its large secondary mirror (Roddiier, 1999), thus confirming the interest of studying a polynomial model of IF (Oberti et al, 2016).

Next, **Figure 3** shows the results of simulation of a tilt (tilted flat mirror shape) compensation by the deformable mirror with the circular geometry of ESO DM.

Finally, we have also successfully tested the implementation of the wavefront sensor model using the “trapz” function included in Matlab in order to apply the integrals over trapezoids in each direction, x and y .

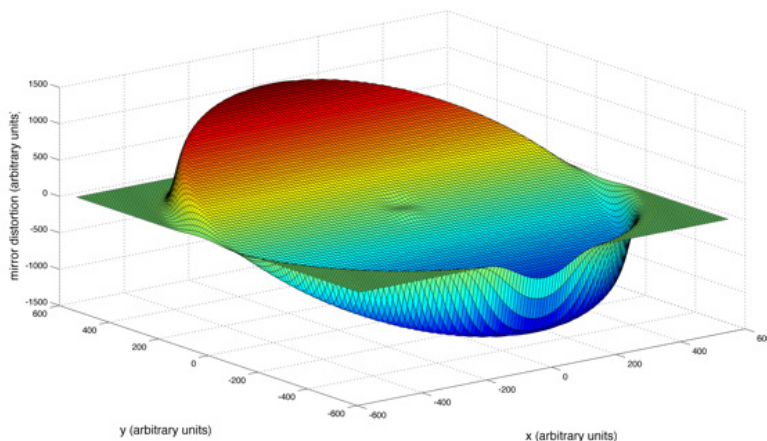


Figura 3. Inclinación simulada, mediante una FI polinómica, en la geometría circular del gran ED de ESO.

Figure 3. Tilt simulated on the circular geometry of the ESO large deformable mirror with polynomial influence functions.

aplicar las integrales sobre trapezoides en cada dirección, x e y .

4. CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos hasta ahora permiten iniciar el estudio de la interacción combinada entre ED y sensores de frente de onda. Distorsiones de tipo pistón e inclinadas fueron reproducidas tanto para arreglos de actuadores con geometría cuadrada como circular. Correspondiendo éste último a la configuración del gran ED secundario en el VLT de ESO. El código para cada FI fue correctamente implementado. Adicionalmente, los datos del sensor de frente de onda también fueron correctamente simulados en Matlab para esta geometría circular.

De acuerdo a lo esperado, el caso de los EDs con geometrías circulares aumenta el tiempo de cómputo. Futuros estudios deberán determinar como mitigar estos requerimientos computacionales, al considerar la implementación combinada en el ED y el sensor. Esto debería ser posible utilizando operadores dispersos definidos desde el formalismo presentado en este trabajo.

Agradecimientos

Me gustaría agradecerle a mis hermanos Paula y Braulio, a mi abuelita Teresa y a mi tía Ada. De forma especial quiero dedicar mi primera publicación a mi mamá, por todo su apoyo, por educarme y por formarme como el hombre que soy. Aunque hoy no estás para ver esta publicación sé que me estás mirando del cielo. Gracias por tanto, te amo mamá. Felipe Riquelme.

4. CONCLUSIONS

The results we have obtained so far allow one to initialize the study of the combined interaction between deformable mirror and wavefront sensor. Piston and tilted distortions have been reproduced both for a square geometry of actuators as well as for a circular one. The circular one corresponds to the configuration of the ESO secondary deformable mirror on the VLT. A code for each influence function model has been successfully implemented. Wavefront sensor data has also been successfully simulated in Matlab for this circular geometry.

As expected, the case of deformable mirrors with circular geometry increases computation time. Further study will determine how to mitigate the computational requirements when considering the combined implementation of the deformable mirror and the sensor. This should be possible using sparse operators to be defined from the formalism introduced here above.

Acknowledgements

I would like to thank my brothers Paula and Braulio, my grandmother Teresa and my aunt Ada. I would like to specially dedicate my first publication to my mother, for all her support and education into the man I am. Although you are not here to see this paper, I am sure you are watching over me from heaven. Thank you for everything, I love you mom. Felipe Riquelme.

GLOSARIO

RESOLUCIÓN ANGULAR: describe la capacidad de distinguir detalles de un objeto en cualquier dispositivo de generación de imágenes, como un telescopio, una cámara, o un ojo, correspondiendo a uno de los mayores determinantes de la resolución de la imagen.

ESPEJO DEFORMABLE: espejos cuyas superficies pueden ser alteradas o deformadas.

FUNCIONES DE INFLUENCIA: funciones matemáticas que describen la deformación en un espejo.

SENSOR DE FRENTE DE ONDA TIPO SHACK-HARTMANN: instrumento óptico usado para caracterizar un sistema de adquisición de imágenes que incorpora cámaras CCD.

GLOSSARY

ANGULAR RESOLUTION: Describes the ability to distinguish small details of an object in any image-forming device such as an optical telescope, a camera, or an eye, thereby making it a major determinant of image resolution.

DEFORMABLE MIRROR: Mirrors whose surface can be altered or deformed.

INFLUENCE FUNCTIONS: Mathematical function that describes the deformation of a mirror.

SHACK-HARTMANN WAVEFRONT SENSOR: Optical instrument used for characterizing an imaging system, that incorporates CCD cameras.

PRINCIPIO CIENTÍFICO

La tecnología de óptica adaptativa es utilizada para mejorar el desempeño de sistemas ópticos, mediante la deformación de espejos, con el objetivo de compensar la distorsión del frente de onda entrante causada por la turbulencia de la atmósfera terrestre. El componente clave de esta tecnología es el uso de un elemento óptico, como un espejo, que puede cambiar y desviar los rayos de luz para enfocarlos a voluntad.

En la **Figura 4** se puede observar como la luz es separada entre el sensor de frente de onda, que mide aberraciones monocromáticas, y el dispositivo de adquisición de imágenes, como una cámara. El sistema de control envía una señal al ED, cuya superficie cambia de forma para minimizar las aberraciones monocromáticas detectadas por el sensor. Finalmente, un rayo de luz es dirigido hacia el ojo, y una pequeña cantidad es reflejada desde el ojo hacia el sistema óptico.

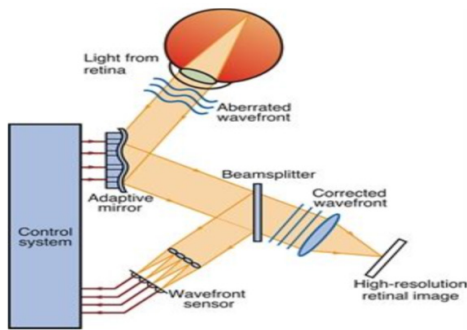


Figura 4. Esquema del principio técnico detrás de un sistema de OA¹.

Figure 4. Schematic of the principle behind an AO system.

REFERENCES

- Arnold, L. 1997, *Applied Optics*, 36, 2019.
- Madec, P.-Y. (2012). Overview of deformable mirror technologies for adaptive optics and astronomy. In *Adaptive optics systems III* (Vol. 8447, p. 8447 - 8447 - 18).
- Menikoff, A. 1991, *Applied Optics*, 30, 833.
- Oberti, S., Kolb, J., Louarn, M. L., Penna, P. L., Madec, P.-Y., Neichel, B., Sauvage, J.-F., Fusco, T., Donaldson, R., Soenke, C., Suárez, M., & Arsenault, R. (2016). AOF LTAO mode: reconstruction strategy and first test results. In E. Marchetti, L. M. Close, & J.-P. Véran (Eds.), *Adaptive optics systems v*. SPIE.
- Rigaut, F., Ellerbroek, B. L., & Northcott, M. J. (1997). Comparison of curvature-based and shack-hartmann-based adaptive optics for the gemini telescope. *Applied Optics*, 36(13), 2856–2868.
- Roddier, F. (1999). *Adaptive optics in astronomy*. Cambridge University Press.

EQUIPO DE INVESTIGADORES / RESEARCH TEAM



Felipe Riquelme Clémentine Béchet

¹Ophthalmic Adaptive Optics (AO). (n.d.). Disponible en <http://www.mcw.edu/AOIP/About-Us/Imaging-Tools/Ophthalmic-Adaptive-Optics.htm>