

Métodos numéricos para la ecuación de Bloch

Numerical methods for Bloch equation

Martín Guerra¹, alumno de 3er año.
Carlos Sing-Long¹, profesor asistente.

¹Instituto de Ingeniería Matemática y Computacional, Escuela de Ingeniería y Facultad de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Chile.

*Autor para correspondencia: casinglo@uc.cl

Martín Guerra¹, 3rd year student.
Carlos Sing-Long¹, assistant professor.

¹Institute of Mathematical and Computational Engineering, School of Engineering and School of Mathematics, Pontificia Universidad Católica de Chile.

*Corresponding author: casinglo@uc.cl

RESUMEN

El siguiente artículo presentará una forma de abordar un problema aplicado al mundo real, planteándolo matemáticamente, usando como ejemplo la resolución de la ecuación de Bloch. Para ello se necesita modelar el problema matemáticamente en una ecuación general, mediante la cual se buscará encontrar el método numérico adecuado para poder resolverla. Para ello, usamos los métodos de Euler considerados: explícito, implícito, modificado, siendo el último el mejor. Luego, en una versión simple de la ecuación, se busca entender las variables de ésta y cómo explican el fenómeno que se busca representar, en este caso, como un campo magnético externo interactúa con uno interno mucho menor. Se resuelve usando el método escogido. Así se logra ver como las distintas constantes elegidas afectan los cambios descritos por los resultados para así resolver la ecuación de Bloch general.

Se concluye que la importancia de cómo se eligen los métodos y el entendimiento de la ecuación son importantes para simularla, ya que un error en éstos implica uno en la solución final.

Palabras clave: Métodos numéricos, EDO, modelamiento matemático.

ABSTRACT

This article presents an approach to a real world problem, by posing it from a mathematical perspective, using the Bloch equation as an example. In order to do this, the problem will be mathematically modeled as a general equation, through which the numerical method to solve it will be sought. For this, explicit, implicit, and modified Euler methods were used, the latter being the best. Then, the understanding of its variables, and how they explain the represented phenomenon, was sought through a simplified version of the equation. In this case, this equation represented how an external magnetic field interacts with a smaller and internal one. When solving the equation using the chosen method, it is possible to assess how the different choices for the constants affect the results. We then proceed to solve the general Bloch equation. In conclusion, the choice of method and the understanding of the equation are relevant to solving it, since any error in these implies errors in the final solution.

Key words: Numerical methods, ODE, mathematical modeling.

1. INTRODUCCIÓN

Las ecuaciones de Bloch son un modelo matemático fundamental para estudiar fenómenos de resonancia, como la resonancia magnética nuclear o la formación de imágenes por resonancia magnética. Dichas ecuaciones describen la interacción entre un campo magnético oscilante con un material en presencia de un campo magnético externo. Pero, cuando se busca reconstruir imágenes por resonancia magnética, el método más utilizado es la transformada de Fourier. Por ello, el uso de éstas sigue siendo mínimo en esta aplicación. La ecuación principal, a continuación, modela la magnetización en el tiempo cuando ésta interactúa con un campo magnético externo,

$$\frac{\partial M(t)}{\partial t} = \gamma(M(t) \times B(t)) \quad (1)$$

donde $M(t)$ es el vector magnetización del material, $B(t)$ es el vector del campo magnético externo y γ es la constante giromagnética; en este caso es la de los protones ya que consideraremos átomos de hidrógeno. El problema de este modelo, es que no explica el decaimiento de la

1. INTRODUCTION

Bloch equations are a fundamental mathematical model to study resonance, such as nuclear magnetic resonance or image formation by magnetic resonance. These equations describe the interaction between an oscillating magnetic field of a material in the presence of an external magnetic field. However, for magnetic resonance image reconstruction, the most common methods use Fourier transforms. Thus, the use of Bloch equations is still reduced for this application. The main equation models the magnetization over time when it interacts with an external magnetic field, described below,

Where $M(t)$ is the material magnetization vector, $B(t)$ is the external magnetic field vector, and γ is the gyromagnetic constant of protons, since hydrogen atoms are being considered for this case. The problem with this model is that it does not explain magnetization decay. If (1) were

magnetización. Si (1) representara fielmente la realidad, $M(t)$ precesaría a la frecuencia de Larmor ($\omega = \gamma \cdot B_0$), siendo B_0 la norma del campo magnético externo) infinitamente sin decaer, lo que no ocurre. Esto sí lo representa la ecuación de Bloch, la cual presentaremos más adelante.

En esta investigación, resolveremos estas ecuaciones usando distintos **MÉTODOS NUMÉRICOS** y veremos cuál de estos métodos es el mejor para obtener los resultados esperados con el mínimo error posible. Los métodos numéricos que vamos a utilizar serán los métodos de Euler: **EULER EXPLÍCITO, EULER IMPLÍCITO y EULER MODIFICADO**. Se espera que los primeros dos métodos no produzcan resultados cualitativamente correctos, pero que sí lo haga el último método, siendo este una combinación de los dos primeros. Además, se modificará el vector $B(t)$ con perturbaciones para ver cómo esto afecta nuestros resultados no sólo analíticamente sino que también numéricamente.

Después, se obtendrán los resultados con los distintos métodos y explicaremos la razón de estos matemáticamente. Luego, descartaremos los dos peores métodos y se trabajaremos la ecuación de Bloch con el mejor. Esta ecuación nace de (1), pero agregando parámetros que ayudan a modelar el decaimiento de la magnetización. Lo anterior modela casos en los que representamos la magnetización y el campo magnético con un solo vector cada uno, por lo que luego, trabajaremos en los casos en los que modelaremos dichas magnitudes con varios vectores, es decir, ya no sólo dependerán del tiempo, sino que también del espacio.

2. METODOLOGÍA

2.1. Planteamiento del problema inicial

Antes de resolver (1) numéricamente, es necesario plantear dicha ecuación de forma distinta. Como se puede ver en (1), esta ecuación es lineal, es decir, se puede encontrar una matriz de transformación $A(t)$ tal que al multiplicarla por $M(t)$ se obtendrá lo mismo que al hacer el producto cruz de esta con $B(t)$. Entonces podemos reescribir (1) como,

$$\frac{\partial M(t)}{\partial t} = \gamma(A(t) \cdot M(t)) \quad (2)$$

donde $A(t)$ es la siguiente matriz,

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y \\ -B_z & 0 & B_x \\ B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

to faithfully represent reality, $M(t)$ should precess at the Larmor frequency ($\omega = \gamma \cdot B_0$, where B_0 is the external magnetic field norm) into infinity without decaying, which does not happen. However, the reality of decay is contained in the Bloch equation, which will be presented later on.

In this research, by using different **NUMERICAL METHODS**, we will solve these equations in order to evaluate the best way to obtain the expected results with the least possible error. The numerical methods to be used are the Euler methods, namely **EXPLICIT EULER, IMPLICIT EULER and MODIFIED EULER**. The first two methods are not expected to produce qualitatively correct data; however, the latter, which is a combination of the other two, is expected to work. Additionally, the $B(t)$ vector will be perturbed in order to assess how it affects the data both analytically and numerically.

After obtaining the data with the different methods, they will be mathematically explained. Then, the worst two methods will be discarded and the work will continue with the best one. The Bloch equation comes from (1) by including the parameters that help modeling magnetization decay. We will start modeling cases in which the magnetization and magnetic fields are each represented by a single vector as opposed to a complete vector field. Afterwards we will work on cases in which said magnitudes are modelled with time and space variant vector fields.

2. METHODS

2.1. Initial problem proposition

Prior to numerically solving (1) it is necessary to state the equation differently. As (1) shows, this is a linear equation; therefore, it is possible to find a transformation matrix $A(t)$ such that its product with $M(t)$ will be equivalent to its cross product with $B(t)$. Thus, (1) can be rewritten as:

Where $A(t)$ is the following matrix,

Ahora bien, a (2) se le puede sumar un vector $b(t)$ que dependerá del tiempo y su aparición en la ecuación dependerá de las condiciones del material en cuestión y condiciones exteriores no relacionadas con el campo magnético externo $B(t)$. Por lo tanto, obtenemos,

$$\frac{\partial M(t)}{\partial t} = \gamma(A(t) \cdot M(t)) + b(t) \quad (3)$$

Ahora, planteamos los problemas que vamos a resolver y analizar, lo que haremos con los métodos de Euler explícito, implícito y modificado. De momento el vector $b(t)$ será nulo. Además, se tendrán dos vectores de campo magnético externo en distintos instantes de la simulación. Uno será el campo magnético principal y el otro será el campo magnético de excitación. Estos son, respectivamente,

$$B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 \end{pmatrix}$$

donde, ω es la frecuencia de Larmor, B_0 es el campo magnético externo inicial y $\Delta B(t)$ es la perturbación.

2.2. La ecuación de Bloch

Después del análisis de resultados, podemos trabajar con la ecuación de Bloch, parecida a (3). Esta ecuación logra modelar el decaimiento del vector $M(t)$ hasta su estado de equilibrio,

$$\frac{\partial M(t)}{\partial t} = \gamma A(t) \cdot M(t) + T(M_{eq} - M(t)) \quad (4)$$

donde M_{eq} es el vector magnetización en el equilibrio (este es paralelo al vector del campo magnético externo $B(t)$) y T una matriz con los valores de T_1 y T_2 que representan los tiempos de relajación, generalmente del orden de [ms],

$$M_{eq} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m_{eq} \end{pmatrix}$$

After this, a time-dependent vector $b(t)$ can be added to (2), and its occurrence in the equation will depend on the analyzed material and external conditions not related to the external magnetic field $B(t)$. Therefore, we get, Now, the equations to be solved and analyzed can be

stated through the explicit, implicit, and modified Euler methods. Initially, the vector $b(t)$ will be considered null. Furthermore, two distinct external magnetic fields will be considered at different times in the simulation. One will be the main magnetic field and the other will be the excitation magnetic field. These are, respectively,

$$B(t) = \begin{pmatrix} \Delta B(t) \cos(\omega t) \\ -\Delta B(t) \sin(\omega t) \\ B_0 \end{pmatrix}$$

Where ω is the Larmor frequency, B_0 is the initial external magnetic field, and $\Delta B(t)$ is the perturbation.

2.2. Bloch equation

After analyzing the results, a Bloch equation similar to (3) can be used. This equation can model the decay of the vector $M(t)$ until its equilibrium state,

Where M_{eq} is the magnetization vector at equilibrium (this is parallel to the external magnetic field $B(t)$) and T a matrix with values T_1 and T_2 that represent relaxation times, typically in the order of [ms],

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{T_2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{T_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{T_1} \end{pmatrix}$$

Ahora, reordenando términos en (4), obtenemos la siguiente ecuación,

$$\frac{\partial M(t)}{\partial t} = \Omega(t) \cdot M(t) + b(t) \quad (5)$$

donde, $\Omega(t) = \gamma A(t) - T$ y $b(t) = TM_{eq}$, con,

$$\Omega(t) = \begin{pmatrix} \frac{-1}{T_2} & \gamma B_z & -\gamma B_y \\ -\gamma B_z & \frac{-1}{T_2} & \gamma B_x \\ \gamma B_y & -\gamma B_x & \frac{-1}{T_1} \end{pmatrix} \quad b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{m_{eq}}{T_1} \end{pmatrix}$$

Luego, (5) será la ecuación con la que trabajaremos y mantendremos constantes los parámetros de γ , T_1 , T_2 y m_{eq} . Entonces, estaremos alterando el vector de campo magnético externo $B(t)$, siendo estas las perturbaciones.

2.3. Ecuación de Bloch con varios vectores de magnetización

Por ahora, hemos trabajado con una variable, el tiempo, por lo que nuestra ecuación ha sido una **EDO** en todo momento. Pero, cuando es necesario plantear problemas usando la ecuación de Bloch, se trabaja con un campo magnético y una magnetización que cubren todo un espacio. Entonces, estos pueden ser representados como varios vectores de campo externo y de magnetización en el espacio. Luego, cada vector $B(t)$ y $M(t)$ pasa a ser escrito como $B(x, t)$ y $M(x, t)$ ya que depende también de la posición espacial de estos. Entonces, (5) se escribe

$$\frac{\partial M(x, t)}{\partial t} = \Omega(x, t) \cdot M(x, t) + b(x) \quad (6)$$

donde $\Omega(x, t)$ dependerá del vector $B(x, t)$, ya que este puede no depender del tiempo en algunos casos (cuando no hay perturbaciones), pero sí podrá depender del espacio,

$$B(x, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_z(x, t) \end{pmatrix} \quad B(x, t) = \begin{pmatrix} \Delta B(x, t) \cos(\omega t) \\ -\Delta B(x, t) \sin(\omega t) \\ B_z(x, t) \end{pmatrix}$$

$\Delta B(t)$ será una fracción de $B_z(x, 0) = B_0$. Dependiendo del $B(x, t)$ con el que se trabaje se modificará la matriz $\Omega(x, t)$. Además, las constantes T_1 , T_2 y m_{eq} dejarán de serlo ya que estas empezarán a depender del espacio, por lo que ahora las escribimos como, $T_1(x)$, $T_2(x)$ y $m_{eq}(x)$, ya que dependiendo de la zona del espacio en la que se trabaje habrá un distinto

By rearranging the terms in (4), the following results,

Where $\Omega(t) = \gamma A(t) - T$ and $b(t) = TM_{eq}$, with,

Then, (5) should be the equation to use with γ , T_1 , T_2 y m_{eq} constant. Then, the variations in the external magnetic field $B(t)$ will be the perturbations to the model.

2.3. Bloch equation with multiple magnetization vectors

Until now, we have worked with only one variable, namely time; thus, being an ordinary differential equation (**ODE**) at all times. However, the proposition of problems using Bloch equations implies a magnetic field and magnetization that encompasses all space. These fields can be represented as multiple vectors for external field and space magnetization. Next, each $B(t)$ and $M(t)$ is described as $B(x, t)$ and $M(x, t)$ due to their dependence on spatial position. Therefore, (5) is written as,

Where $\Omega(x, t)$ will depend on the vector $B(x, t)$, since the latter may not depend on time only in those cases in which there are space perturbations,

Where $\Delta B(t)$ will be a fraction of $B_z(x, 0) = B_0$. Depending on the $B(x, t)$ to be used, the matrix $\Omega(x, t)$ will be modified. Moreover, T_1 , T_2 and m_{eq} stop being constants because they depend on space; thus, they are described as $T_1(x)$, $T_2(x)$ and $m_{eq}(x)$. Depending on the considered sector of space, there are different equilibrium vectors and relaxation times.

vector de equilibrio y distintos tiempos de relajación.

En principio tendríamos una ecuación en derivadas parciales (EDP), por lo que habría que plantearnos de nuevo como resolver el problema. Pero, como discretizaremos los vectores $M(x,t)$ en una cantidad finita y trabajaremos con cada uno de ellos por separado, estos ya no dependerán del espacio, puesto que fijamos la componente espacial en cada vector. Esto porque no hay derivadas espaciales. Podríamos decir que sería como trabajar con un sistema de EDOs donde la cantidad de estas dependerá de la cantidad de vectores $M(x,t)$ que discreticemos.

3. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

3.1. Primeras soluciones

Primero se implementaron los programas para simular los tres métodos de Euler para resolver (2). Se espera que dado un vector $M(t)$ inicial, un vector de magnetización externa $B(t)$ (el cual será 0 en sus componentes x e y y 3[T] en su componente z) y $\gamma = 42.5764 \cdot 10^6$ [Hz], el primero precese de forma infinita y estable, ya que no hay términos que modelen algún tipo de decaimiento. Los resultados obtenidos (**Figura 1**), con los tres métodos de Euler, representan el campo visto desde arriba, es decir los cambios en las componentes x e y del vector magnetización dado el campo magnético externo.

Se observa que el método de Euler modificado es el que más se asemeja a la realidad, ya que la norma del vector magnetización se mantiene. Mientras que los métodos explícito e implícito divergen. Es justamente por este resultado que cuando se trabaje con la ecuación de Bloch se dejará de lado los dos primeros métodos y se trabajará únicamente con el método modificado. Ahora, como el método modificado mantiene la norma constante por su formulación matemática,

$$M_{n+1} - M_n = \frac{h}{2}(A(t_{n+1})M_{n+1} + A(t_n)M_n) \quad (7)$$

Desarrollando un poco y multiplicando por M_{n+1}^T a la derecha se obtiene,

$$\|M_{n+1}\|_2^2 - \frac{h}{2}M_{n+1}^T A(t_{n+1})M_{n+1} = \frac{h}{2}M_{n+1}^T A(t_n)M_n + M_{n+1}^T M_n \quad (8)$$

Ahora, como A es antisimétrica y constante, el segundo término del lado izquierdo es cero. Luego, si multiplicamos (7) por M_n^T por la derecha obtenemos,

$$M_n^T M_{n+1} - \frac{h}{2}M_n^T A(t_{n+1})M_{n+1} = \frac{h}{2}M_n^T A(t_n)M_n + \|M_n\|_2^2 \quad (9)$$

This would correspond to a partial differential equation (PDE), and would need a new approach to its solution. However, by discretization of the vectors $M(x,t)$ into a finite quantity, and by working with them separately, these will no longer depend on space since that component is fixed for each vector. This is possible because there are no spatial derivatives. Therefore, this is like working with a system of ODEs where the number of equations will depend on the number of $M(x,t)$ to be discretized.

3. RESULTS AND DISCUSSION

3.1. First solutions

Firstly, the programs to simulate the three Euler methods to be solved (2) were implemented. Given an initial $M(t)$ vector, a $B(t)$ external vector (with 0 in its x and y components and 3[T] in its z component) and a $\gamma = 42.5764 \cdot 10^6$ [Hz], an infinite and stable precession of the first was expected, since there are no terms to model any type of decay. The results of the three Euler methods (**Figure 1**) represent a view from the top of the field; i.e., the changes in x and y components of the magnetization vector, given the external magnetic field.

The modified Euler method yields results closest to reality, since the magnetization norm is maintained, while the explicit and implicit methods diverge. Precisely by these results, when working with the Bloch equation, the first two methods will not be considered and only the modified Euler method will be used. Now, since the latter maintains the magnetization norm constant by its mathematical formulation,

And by expanding and multiplying by M_{n+1}^T , we get,

Since A is antisymmetric and constant, the second term to the left is 0. Then, by multiplying (7) by M_n^T , we get,

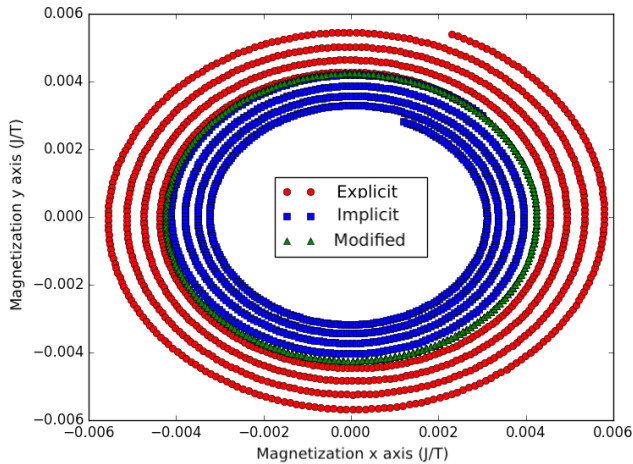


Figura 1. Resultados de la ecuación (2) con los tres métodos de Euler.

Figure 1. Results from equation (2) with the three Euler methods.

Por las propiedades de A , el primer término del lado derecho es cero. Luego, el segundo término del lado izquierdo de (9) es igual al primer término del lado derecho de (8), por lo que tenemos que $\|M\|$, es decir la norma se mantiene.

3.2. Resolvemos la ecuación de Bloch

Ahora resolvemos la ecuación de Bloch (5), con el método de Euler modificado, en este caso planteamos las siguientes constantes,

además, el vector $B(t)$ sería el vector con perturbación con la frecuencia de Larmor: ω y ω_0 será una fracción de B_0 .

Los resultados (Figura 2) muestran como $M(t)$ sale del equilibrio por un tiempo, durante el que $B(t)$ tiene todas sus componentes distintas de 0, se puede ver como la magnetización va procesando y su componente vertical (el eje z) va disminuyendo en desmedro de sus componentes transversales.

Luego, una vez que se cumple el tiempo especificado en el que se usa un campo externo con perturbación se cambia dicho vector por uno igual al de (2) y ahí se puede ver, dados

By the properties of A , the first term of the right side is 0. Then, the second term of the left side of (9) is equal to the first term of the right side of (8). Thus, we have that $\|M\|$, i.e. the norm, is maintained.

3.2. Solving the Bloch equation

Now, we solve the Bloch equation (5) with the modified Euler method. In this case, we propose the following constants:

Moreover, the vector $B(t)$ would be the perturbed vector with the Larmor frequency ω and ω_0 would be a fraction of B_0 .

These results (Figure 2) show how $M(t)$ is temporarily out of equilibrium, while $B(t)$ has all the components different from 0. It can be appreciated how the magnetization shows precession and its vertical component (z axis) diminishes at the expense of its transversal components.

Initially, an external field with perturbation was used. Then, after the specified time was completed, this vector was changed by another one equal to (2). Here, given the small values for T_1 and T_2 , a rapid decay of the transversal

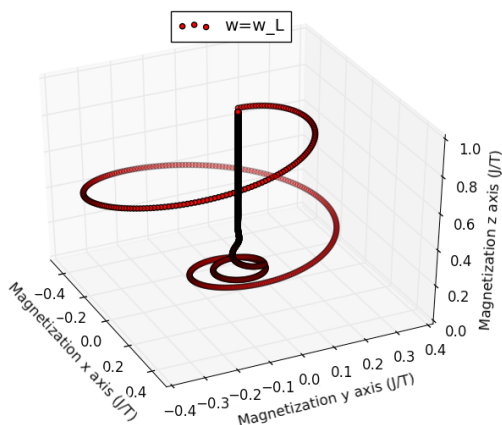


Figura 2. Resultados de la ecuación (5).

Figure 2. Results for equation (5).

los pequeños valores de T_1 y T_2 , un rápido decaimiento de las componentes transversales $M(t)$ y un aumento de la componente vertical de este.

Estos son los resultados esperados a la ecuación, ya que este busca describir no sólo el decaimiento magnético sino que también el regreso al equilibrio.

3.3. Soluciones de la ecuación de Bloch con más de un vector

Finalmente, buscamos resolver la ecuación general de Bloch, por lo que sumamos una cantidad finita de vectores que representan una magnetización y les aplicamos a cada uno un campo externo diferente. Como no tiene sentido graficar todos los vectores, se hicieron simulaciones con 1024 vectores de magnetización y graficamos la suma de todos los vectores componente a componente. En aplicaciones prácticas de resonancia magnética, sólo importan las componentes horizontales para obtener una señal, y como son esencialmente iguales los resultados de las componentes x e y graficamos la primera (**Figura 3**). Además, se mantuvo constante T_1 , T_2 y m_{eq} , la frecuencia cuando había perturbación fue la de Larmor.

Luego, como se tuvo un vector $B(x, t)$ con perturbación hasta un cierto punto en el tiempo, después se cambió al vector vertical que dependerá de una función en su última componente, la que a su vez cambiará en un determinado momento a otra función, usaremos tres funciones distintas para B_z (las llamaremos B_{z1} , B_{z2} y B_{z3} respectivamente). Las constantes utilizadas, al igual que las funciones serían las siguientes,

$$T_1 = 225 \cdot 10^{-6} [s]$$

$$T_2 = 15 \cdot 10^{-6} [s]$$

$$\gamma = 42.5764 \cdot 10^6 [Hz]$$

$$B_{z1}(x, t) = B_0 = 3 [T]$$

$$B_{z2}(x, t) = B_0 - G_x \cdot M_x(x, t) + G_y \cdot M_y(x, t)$$

$$B_{z3}(x, t) = B_0 + G_x \cdot M_x(x, t)$$

donde, G_x y G_y son fracciones de B_0 y en este ejemplo son iguales.

4. CONCLUSIONES

Dado el planteamiento esta investigación, se tuvo como objetivo poder resolver el caso más general de la ecuación de Bloch. Para cumplir dicho objetivo se necesitaba encontrar un método numérico que pueda darnos soluciones en las que se observe como las distintas variables de las ecuaciones afectan cualitativamente dichos resultados.

Primero, se planteó una ecuación (2) que servía como

components of $M(t)$, along with a rapid increase in its vertical component, can be appreciated.

These results were expected, since this equation seeks not only to describe the magnetic decay, but also its return to equilibrium

3.3. Solutions to Bloch equation with multiple vectors

Finally, we sought to solve the general Bloch equation; thus, we added a finite number of vectors that represent magnetization and we applied a different magnetic field to each. Since graphing every vector is not important, 1024 simulations with magnetization vectors were performed and the sum of each component per vector was graphed. In practical applications of magnetic resonance, only the horizontal components are important to get a signal, and since the results of the components for x and y are essentially identical, we only graphed the first (**Figure 3**). Moreover, T_1 , T_2 and m_{eq} were kept constant, and, upon perturbation, the Larmor frequency was used.

Then, we will use three different functions for (termed , and , respectively), since the vector with perturbation was used for a limited time, then changed to a vertical vector

that depends on a function of its last component, which, in turn, changed at a set time to another function. The constants and the functions used were as follows,

Where G_x and G_y are fractions of B_0 and, in this case, equal.

4. CONCLUSIONS

Given the approach of this research, the objective was to solve the more general case of the Bloch equation. A numerical method capable of providing solutions was needed, in order to show how the different variables within the equations qualitatively affect the results.

Firstly, an equation that served as an experiment to compare

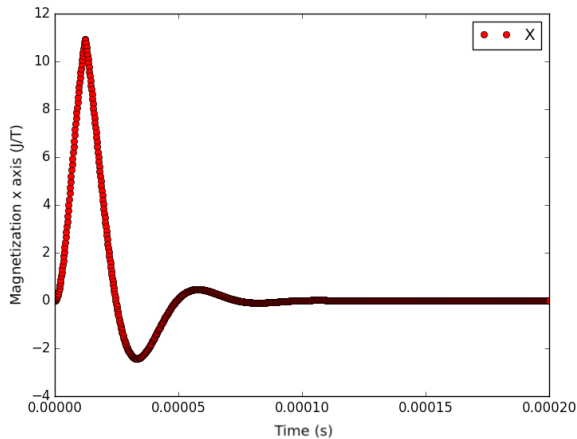


Figure 3. Sum of the X components of the solutions for equation (6).

Figure 3. Sum of the X components of the solutions for equation (6).

experimento para poder comparar los tres métodos de Euler y elegir el que nos entregaba la solución correcta como el método numérico a utilizar. El mejor método fue el de Euler modificado. Segundo, se planteó la ecuación de Bloch pero en el caso en que solo dependía del tiempo, es decir, con un solo vector en cuestión. De esta forma se estudió en detalle cómo afectaban las variables de la ecuación a los resultados de esta, por ejemplo el factor que multiplicaba las primeras dos componentes del vector $B(t)$ nos indicaba que tan rápido iba a decaer la componente vertical del vector $M(t)$. Después, se resolvió la ecuación de Bloch en su forma general, dependiendo del tiempo y del espacio, lo que nos entregó los resultados obtenidos en la última parte.

Finalmente, es importante recalcar que lo que esta

the three different Euler methods was proposed (2), in order to choose the correct solution as numerical method to be used. The best method was modified Euler. Secondly, a Bloch equation was proposed, but only depending on time; that is, with only one vector to be considered. This allowed the detailed study of how the results are affected by the equation variables. For example, the multiplying factor of the first two components of $B(t)$ vector as an indicator of the decay velocity of $M(t)$ vector. Afterwards, the Bloch equation was solved in its general form, depending on time and space, which led to the final results.

Finally, it is important to note that this research does not aim to present the actual Bloch equation solutions, but the procedure, and the implications associated to it, which led to the correct solution for the equations.

GLOSARIO

ECUACIÓN DIFERENCIAL ORDINARIA (EDO):

Es una ecuación matemática cuya incógnita es una función diferenciable, puesto que dicha ecuación relaciona el valor de la función con sus derivadas, que depende de una sola variable.

ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL (EDP): Es una ecuación cuya incógnita es una función diferenciable, puesto que dicha ecuación relaciona el valor de la función con sus derivadas, que depende de al menos dos variables.

EULER EXPLÍCITO: Método numérico iterativo para resolver EDOs que consiste en discretizar la variable en cuestión de modo que para cada iteración se calcula el resultado utilizando los resultados de la iteración anterior, es decir, la ecuación se va resolviendo explícitamente.

EULER IMPLÍCITO: Método numérico iterativo para resolver EDOs que consiste en discretizar la variable en cuestión de modo que para cada iteración se calcula el

GLOSSARY

ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION (ODE):

a mathematical equation whose unknown variable is a differentiable function, since this equation relates the value of the function with its derivatives, which, in turn, depend on a single variable.

PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION (PDE): a mathematical equation whose unknown variable is a differentiable function, since this equation relates the value of the function with its derivatives, which, in turn, depend on two or more variables.

EXPLICIT EULER: numerical method to solve ODEs consisting on discretizing the unknown variable in a way that results for every iteration are calculated using data from the previous iteration; i.e. the equation is solved explicitly.

IMPLICIT EULER: iterative numerical method to solve ODEs consisting on discretizing the unknown variable in a way that results for every iteration are obtained within the same iteration; i.e. the equation is

resultado utilizando los resultados que se obtienen en la misma iteración en la que se está, es decir, la ecuación se va resolviendo implícitamente.

EULER MODIFICADO: También conocido como el Método del Trapecio, es un método numérico iterativo para resolver EDOs que consiste en discretizar la variable en cuestión de modo que para cada iteración se calcula el resultado utilizando los resultados obtenidos tanto en la iteración anterior como en la que uno se encuentra.

MÉTODOS NUMÉRICOS: Métodos de aproximación de una solución a un problema del cual se obtiene un resultado aproximado cuando se desconoce la solución explícita de este.

solved implicitly.

MODIFIED EULER: also known as Trapezoidal Method is an iterative numerical method to solve ODEs consisting on discretizing the unknown variable in a way that results for every iteration are calculated using data from the previous and current iteration.

NUMERICAL METHODS: methods of approaching to solutions of problems in which an approximated result is obtained when the explicit solution is unknown.

investigación busca presentar no es la solución a la ecuación de Bloch en sí, sino que el procedimiento que se tuvo que seguir y sus implicancias para poder llegar al resultado correcto de esta.

PRINCIPIO CIENTÍFICO

El principio más importante a entender en este artículo es el de métodos numéricos y como uno puede cambiar estos para encontrar mejores resultados. La idea de dicho principio es aproximar la solución de una ecuación matemática cuando no se sabe la solución exacta de esta o es muy difícil llegar a esta. Pero, es importante también, poder criticar dicha solución y, por lo tanto, el método utilizado para encontrarla por si es que es necesario cambiarlo por uno que dé una mejor solución. Luego, cuando uno critica la solución obtenida es importante tener conocimiento matemático suficiente para poder determinar no sólo un cambio de método numérico sino que poder determinar por cuál método numérico es mejor cambiarla.

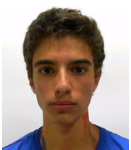
REFERENCES

- Quarteroni, A., Sacco, R., Saleri, F. (2000). *Numerical Solutions of Ordinary Differential Equations*. En *Numerical Mathematics* (p.473). Nueva York: Springer.
- Apuntes del curso *Applied Fourier Analysis and Elements of Modern Signal Processing*, (2014) Stanford University.
- Ecuaciones de Bloch. (s.f.). En *Wikipedia*. Recuperado el 30 de septiembre de 2017 de https://es.wikipedia.org/wiki/Ecuaciones_de_Bloch

SCIENTIFIC PRINCIPLE

Numerical methods and how they can be modified to find the best results it is the most important principle to understand in this article. The idea behind this principle is to approach a solution of a mathematical equation when the exact solution is either unknown or too difficult to reach. However, it is also important to be able to criticize that solution and the used method, in case it needs to be modified in order to reach a better solution. In order to criticize the obtained solution, it is important to have enough mathematical knowledge to determine not only changes in numerical methods, but also to decide by which method is best to be changed.

EQUIPO DE INVESTIGADORES / RESEARCH TEAM



Martín
Guerra



Carlos
Sing-Long